

Métrologie Nucléaire

PHYSH-407

Titulaire: N. Pauly

Organisation du cours

- Théorie:
 - 2 ECTS
 - 4 questions de théorie lors de l'examen écrit → 60% de la note finale
 - Slides disponibles sur http://metronu.ulb.ac.be/pauly_cours.html
- Laboratoires:
 - 3 ECTS (1 ECTS est pour PHYSH-405)
 - Organisation: M. Ciccarelli (Maureen.Ciccarelli@ulb.be)
 - 25% de la note finale → Note de participation + Cahier de rapports
 - 1 question lors de l'examen écrit → 15% de la note finale

Références

- S. Tavernier, *Experimental techniques in nuclear and particle physics*, Springer-Verlag, 2010. Texte complet:
<http://www.springer.com/physics/particle+and+nuclear+physics/book/978-3-642-00828-3>
- P. Sigmund, *Particle penetration and radiation effects*, Springer-Verlag, 2006. Texte complet:
<http://www.springer.com/physics/particle+and+nuclear+physics/book/978-3-540-31713-5>
- R.D. Evans, *The atomic nucleus*, McGraw-Hill, 1995. Texte complet:
<http://www.archive.org/details/atomicnucleus032805mbp>
- G.F. Knoll, *Radiation detection and measurement (4 éd.)*, Wiley, 2010.
- W.R. Leo, *Techniques for nuclear and particle physics experiments: a how-to approach (2 éd.)*, Springer-Verlag, 1994.

Plan du cours

Partie I: Rappels

- Notions de relativité
- Notions de statistique
- Filiation radioactive

Partie II: Interactions des rayonnements ionisants avec la matière

1. Interaction des particules chargées avec la matière: Considération de base
2. Interaction des ions avec la matière
3. Interaction des électrons et des positrons avec la matière
4. Interaction des photons avec la matière
5. Interaction des neutrons avec la matière
6. Ionisations et excitations

Partie III: Détection des rayonnements ionisants

7. Propriétés générales des détecteurs
8. Détecteurs basés sur l'ionisation des gaz
9. Détecteurs basés sur l'ionisation dans les semiconducteurs
10. Détecteurs basés sur la scintillation
11. Détecteurs de neutrons

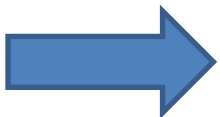
Partie I: Rappels

Rappels

- Notions de relativité
- Notions de statistique
- Filiation radioactive

Postulats fondamentaux de la relativité

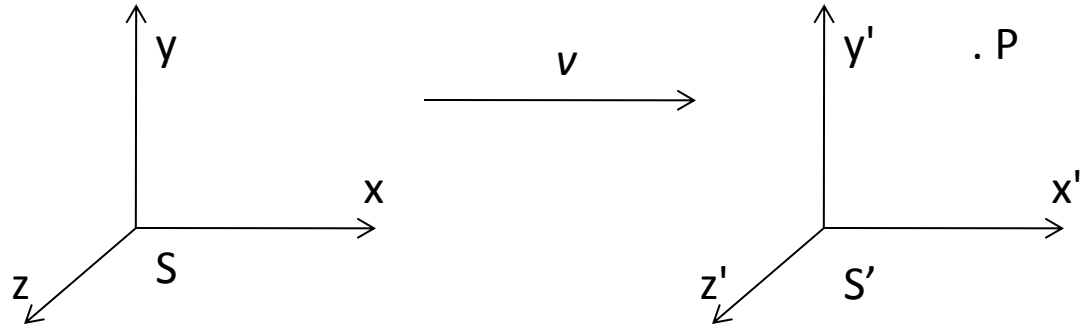
1. *Principe de relativité* ou *principe d'invariance galiléenne* (Poincaré, 1905): Les lois de la physique sont identiques, c'est-à-dire ont même expression mathématique, dans tous les référentiels inertiels ou référentiels galiléens (un référentiel inertiel est un référentiel dans lequel un objet isolé est en mouvement de translation rectiligne uniforme et les référentiels inertiels sont en mouvement rectiligne uniforme les uns par rapport aux autres)
2. *Universalité de la vitesse de la lumière* (Einstein, 1905): La vitesse de la lumière dans le vide est constante et isotrope et a même mesure dans tous les référentiels inertiels en mouvement relatif. Cette vitesse ne dépend donc pas de l'état de mouvement de la source (vitesse de la lumière: $c = 299\,792\,458\text{ ms}^{-1} \approx 3 \cdot 10^8\text{ ms}^{-1}$)




La masse m_0 et la charge q d'une particule sont propres à celle-ci et donc invariantes pour un changement de repère inertiel

Transformation de Galilée

Considérons un point P dans 2 référentiels inertiels: S et S' (P est au repos dans S')



Le référentiel S' se déplace à une vitesse v constante par rapport au référentiel S selon l'axe $x \rightarrow$ selon la transformation de Galilée (non-relativiste), on a pour tout P :

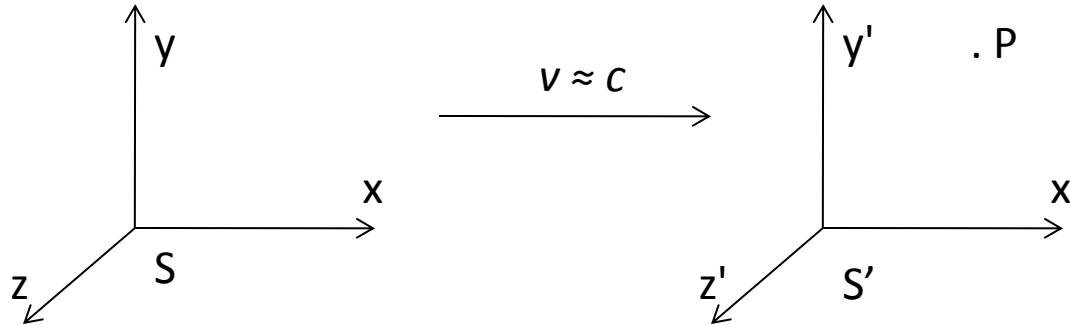

$$\begin{cases} x' = x - vt \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{cases}$$

Pour une particule de masse m_0 et de vitesse v : $T = m_0 v^2/2$ et $p = m_0 v$



Pas valable pour l'électromagnétisme

Transformation de Lorentz (1)



Pour des vitesses élevées (proches de c) \rightarrow utilisation de la transformation de Lorentz (c est identique dans les 2 référentiels)



$$\left\{ \begin{array}{l} x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \end{array} \right.$$

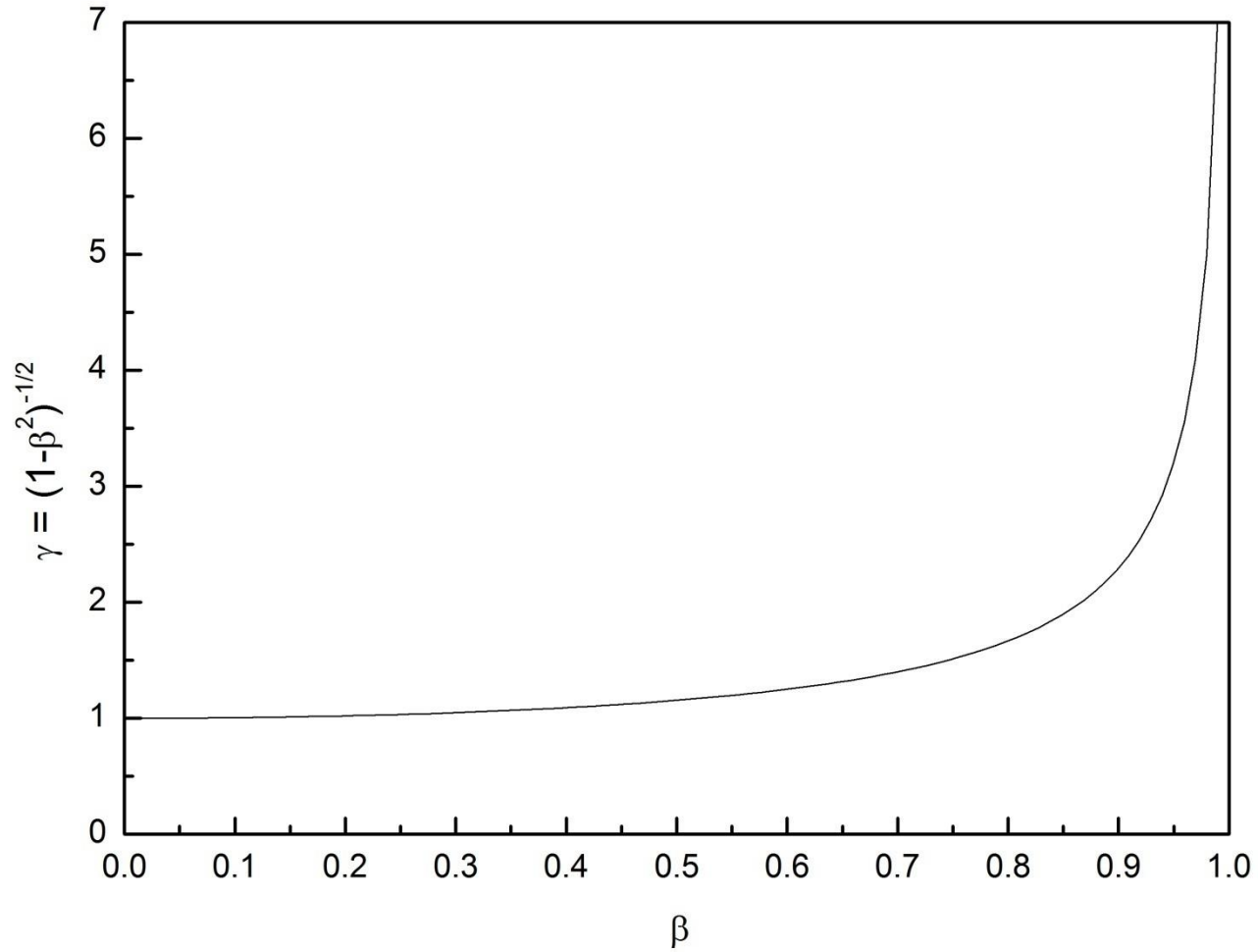
Transformation de Lorentz (2)

$$\begin{cases} x' = \gamma(x - \beta ct) \\ y' = y \\ z' = z \\ ct' = \gamma(ct - \beta x) \end{cases}$$

avec

$$\begin{cases} \beta = \frac{v}{c} \\ \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \end{cases}$$

Expression de γ en fonction de β



Intervalle entre deux événements

- Dans un espace quadridimensionnel (3 coordonnées spatiales + le temps) → un événement est représenté par un point → point d'univers
- Une particule en mouvement décrit dans cet espace une ligne → ligne d'univers
- On définit l'intervalle s_{12} entre 2 événements 1 et 2 par

$$s_{12}^2 = c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2$$

- À partir des postulats → s_{12} est le même dans tous les référentiels inertiels → invariant
- Pour 2 événements infiniment proches → intervalle ds →

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = \text{invariant}$$

Quadrivecteur espace-temps

- Quadrivecteur espace-temps \bar{S} défini comme l'ensemble des composantes réelles $ct, x, y, z \rightarrow$ le carré de son module est défini par \rightarrow

$$S^2 = (ct)^2 - x^2 - y^2 - z^2$$

- S^2 est donc invariant pour une transformation lorentzienne
- Considérons 2 référentiels inertiels S et S' ayant comme origine des espaces et des temps le même événement $E_1 \rightarrow$ si nous considérons un deuxième événement E_2 avec comme coordonnées x, y, z, t dans S et x', y', z', t' in S' (quadrivecteur espace-temps) \rightarrow la forme quadratique

$$s^2 = c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = c^2 t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2$$

est un invariant

Quadrivecteurs

- De manière générale \rightarrow un quadrivecteur \bar{X} est un l'ensemble des composantes réelles x_0, x_1, x_2, x_3 qui se transforment, dans un changement de référentiel inertiel, comme les coordonnées espace-temps
- Ils ont comme propriété:
 - Le carré de l'amplitude $X^2 = x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$ d'un quadrivecteur est invariant
 - La combinaison linéaire $a\bar{X} + b\bar{Y}$ de 2 quadrivecteurs est un quadrivecteur
 - Le produit scalaire $\bar{X} \cdot \bar{Y} = x_0y_0 - x_1y_1 - x_2y_2 - x_3y_3$ de 2 quadrivecteurs est invariant

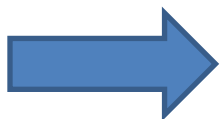
Dilatation du temps

- Considérons 1 point matériel avec une vitesse v (le long de x) mesurée dans le référentiel $S \rightarrow$ dans un intervalle de temps $dt \rightarrow$ il se déplace d'une distance $dx \rightarrow$

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 = c^2 dt^2 (1 - \beta^2) = \text{invariant}$$

- Pour un observateur dans le référentiel $S' \rightarrow$ le point est fixe \rightarrow

$$ds^2 = c^2 dt'^2 = \text{invariant}$$

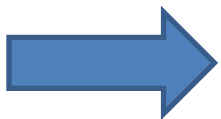


$$dt' = dt \sqrt{1 - \beta^2} = \frac{dt}{\gamma}$$



$$\Delta t = \gamma \Delta t'$$

- $\Delta t' = \Delta \tau_0$ est le temps propre du point matériel



Pour un observateur au repos (dans S), l'intervalle de temps Δt est toujours plus grand que le temps propre

Exemple de dilatation du temps

- Au Fermilab, des pions π^+ sont créés avec une énergie cinétique $T = 200$ GeV \rightarrow ils se déplacent de 300 m avec une perte $< 3\%$
- Cette perte est due à la désintégration du π^+ \rightarrow vie moyenne du π^+ : $\tau_0 = 26.0$ ns (temps propre)
- Si cette vie moyenne était la même pour l'observateur du laboratoire (dans S) \rightarrow la fraction de π^+ survivants en $d = 300$ m avec une vitesse $v \approx 0.99 c$ serait \rightarrow

$$\exp(-d/c\tau_0) = 10^{-17} \ll 0.97$$

- Mais à 200 GeV $\rightarrow \gamma = 1433 \rightarrow \tau_{lab} = \gamma\tau_0 \approx 37 \mu s \rightarrow$

$$\exp(-d/c\tau_{lab}) \simeq 0.97$$

cqfd

Contraction de la longueur

- Un objet a une longueur fixe l_0 (longueur propre) pour un observateur dans S'
- Un observateur au repos (dans S) voit cet objet se déplacer avec une vitesse v (parallèle à l'objet)
- La longueur dans S , l , est toujours plus petite que l_0 :

$$l = \frac{l_0}{\gamma}$$



La longueur d'un objet en mouvement est toujours plus petite que sa longueur propre

Exemple de contraction de longueur

- Les muons cosmiques μ produits dans la partie extérieure de l'atmosphère par les rayons cosmiques (principalement des protons) ont une $v \approx c$
- La vie moyenne d'un muon $\tau_\mu = 22 \mu s \rightarrow$ Ils devraient se désintégrer après avoir parcouru une distance moyenne de $d = c\tau_\mu = 660 \text{ m} \rightarrow$ aucun ne devrait atteindre la surface de la terre
- En réalité \rightarrow contraction de l'épaisseur de l'atmosphère terrestre \rightarrow avec $\gamma \approx 1000 \rightarrow$ l'épaisseur de l'atmosphère de $\approx 10 \text{ km}$ est « vue » par le μ comme ayant une épaisseur de $\approx 10 \text{ m}$

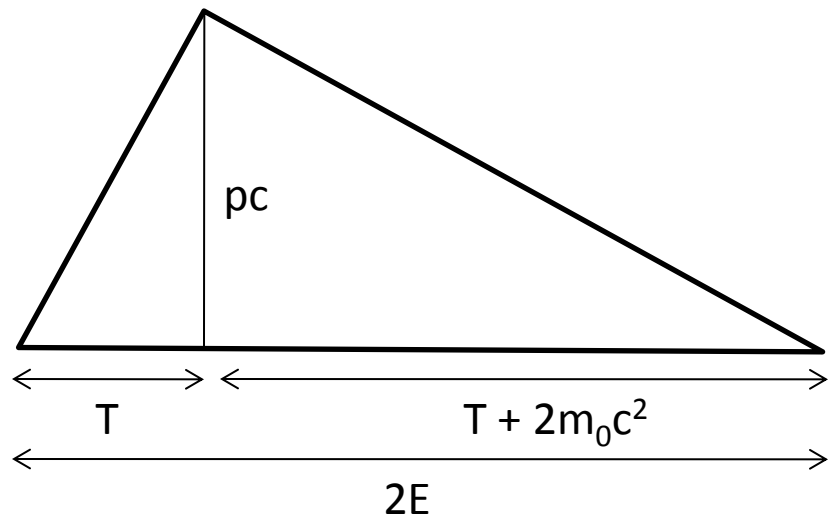
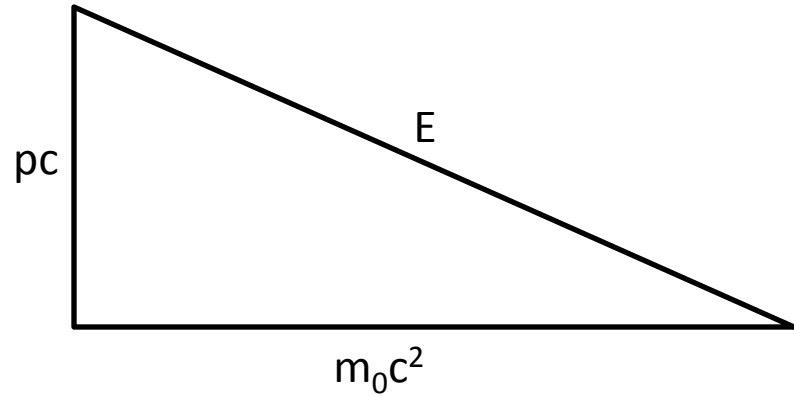
Cinématique relativiste

- Une particule de masse m_0 , en mouvement avec une vitesse \bar{v} dans un référentiel inertiel au repos est caractérisée par:
 - une quantité de mouvement $\bar{p} = \gamma m_0 \bar{v}$
 - une énergie totale $E = \gamma m_0 c^2$
 - une énergie cinétique: $T = E - m_0 c^2 = (\gamma - 1) m_0 c^2$
- Les relations suivantes existent entre E , T et p :

$$\bar{p} = \frac{E\bar{v}}{c^2} \quad E = \sqrt{p^2 c^2 + m_0^2 c^4} \quad pc = \sqrt{T(T + 2m_0 c^2)}$$

- Pour un photon ou un neutrino $\rightarrow v = c \rightarrow E = pc$

Illustration géométrique des relations de cinématique



Quadrivecteur énergie-impulsion

- Les 4 composantes $E/c, p_x, p_y, p_z$ forment le quadrivecteur énergie-impulsion \overline{P}
- Le carré du module du quadrivecteur énergie-impulsion est donc invariant dans un changement de référentiel inertiel

$$P^2 = \frac{E^2}{c^2} - p^2 = \text{invariant}$$

- Or dans un référentiel inertiel dans lequel la particule est au repos \rightarrow

$$P^2 = m_0^2 c^2$$

- On en déduit \rightarrow

$$E^2 = p^2 c^2 + m_0^2 c^4$$

Quadrivecteur énergie-impulsion pour un système de particules

- Considérons un ensemble de particules libres sans interaction
→ chaque particule est caractérisée par un quadrivecteur espace-temps et un quadrivecteur énergie-impulsion
- La résultante $\bar{P} = \sum_k \bar{P}_k$ est aussi un quadrivecteur dont les composantes sont les sommes algébriques des quadrivecteurs énergie-impulsion des particules →

$$\bar{p} = \sum \bar{p}_k \quad \text{et} \quad E = \sum E_k$$

- Propriété des quadrivecteurs → invariance de P^2 →

$$P^2 = \frac{E^2}{c^2} - p^2 = \text{invariant}$$

- Relation très utile pour l'étude la collision ou la désintégration de particules

Exemple: désintégration d'une particule (1)

- Soit la désintégration $A \rightarrow B + C$ avec A initialement au repos dans le référentiel du laboratoire (qui s'identifie donc au référentiel du centre de masse) \rightarrow

$$0 = \bar{p}_B + \bar{p}_C \rightarrow |p_B| = |p_C|$$

- L'invariance du quadrivecteur énergie-impulsion implique \rightarrow

$$\frac{E_A^2}{c^2} = \frac{(E_B + E_C)^2}{c^2} \Rightarrow m_A c^2 = E_B + E_C$$

- On a de plus \rightarrow

$$\begin{cases} E_B^2 = p_B^2 c^2 + m_B^2 c^4 \\ E_C^2 = p_C^2 c^2 + m_C^2 c^4 \end{cases}$$

- Par soustraction $\rightarrow E_B^2 - E_C^2 = (m_B^2 - m_C^2)c^4$
- En divisant par $m_A c^2 = E_B + E_C$

Exemple: désintégration d'une particule (2)

- On obtient donc $\rightarrow E_B - E_C = \frac{m_B^2 - m_C^2}{m_A} c^2$

- Et finalement \rightarrow

$$\begin{cases} E_B = \frac{m_A^2 + m_B^2 - m_C^2}{2m_A} c^2 \\ E_C = \frac{m_A^2 + m_C^2 - m_B^2}{2m_A} c^2 \end{cases}$$

- Comme $p_{B,C}^2 \geq 0 \rightarrow$ on en déduit $m_A \geq m_B + m_C \rightarrow m_A c^2 = m_B c^2 + m_C c^2 + T$ avec T , l'énergie cinétique totale dans le système du centre de masse

Exemple: Énergie de seuil (1)

- L'énergie de seuil de production de Q particules lors d'une collision inélastique est l'énergie cinétique minimale des N particules incidentes, permettant de créer des particules au repos dans leur référentiel du centre de masse
- Soit le cas de l'énergie cinétique minimale que doit posséder une particule de masse m_1 entrant en collision avec une particule immobile de masse m_2 , pour former Q particules de masse m_j
- Dans le repère du laboratoire, S , avant la collision \rightarrow

$$P^2 = \frac{(E_1 + m_2 c^2)^2}{c^2} - p_1^2$$

- Dans le repère du centre de masse, S' , après la collision \rightarrow

$$\sum_j^Q p_j = 0 \rightarrow P^2 = \frac{(\sum_j^Q m_j c^2)^2}{c^2}$$

Exemple: Énergie de seuil (2)

- Avec

$$p_1^2 c^2 = E_1^2 - m_1^2 c^4$$

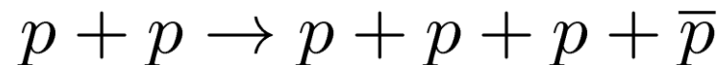
- En notant

$$E_1 = T_{min} + m_1 c^2$$

- Et en remplaçant \rightarrow

$$T_{min} = \frac{\left(\sum_j^Q m_j c^2\right)^2 - (m_1 c^2 + m_2 c^2)^2}{2m_2 c^2}$$

- Pour la réaction entre 2 protons (l'un immobile) \rightarrow



- Avec $m_p = 938 \text{ MeV}/c^2 \rightarrow T_{min} = 6 mc^2 \rightarrow T_{min} = 5.63 \text{ GeV}$

Remarque sur la limite relativiste

- Si la vitesse d'une particule est « proche » de la vitesse de la lumière \rightarrow les relations relativistes doivent être utilisées pour la particule
- Que veut dire « proche » de la vitesse de la lumière ? \rightarrow délicat à déterminer de prime abord
- Il est plus simple de considérer l'énergie cinétique de la particule $T \rightarrow$

Si $T > (1/200)m_0c^2 \rightarrow$ les relations relativistes doivent être utilisées pour la particule (200 est un facteur arbitraire \rightarrow dépend des applications et de la précision voulue)

- Exemples: pour un électron $\rightarrow (1/200)m_e c^2 = 2.56 \text{ keV}$
pour un proton $\rightarrow (1/200)m_p c^2 = 4690 \text{ keV}$

Notions de statistique

- Considérons un processus caractérisé par un nombre de succès x résultant d'un nombre d'essais n
- Chaque essai est un processus binaire pour lequel la probabilité de succès vaut p
- 3 modèles statistiques sont importants pour ce cours:
 - La distribution binomiale
 - La distribution de Poisson
 - La distribution gaussienne (ou normale)

Distribution binomiale

- La distribution binomiale est applicable à tous les processus caractérisés par une valeur constante de p

$$P(x) = \frac{n!}{(n-x)!x!} p^x (1-p)^{n-x}$$

- Propriétés de la distribution binomiale :

$$\sum_{x=0}^n P(x) = 1$$

$$\bar{x} = \sum_{x=0}^n xP(x) = pn$$

$$\sigma^2 = \sum_{x=0}^n (x - \bar{x})^2 P(x) = np(1-p)$$

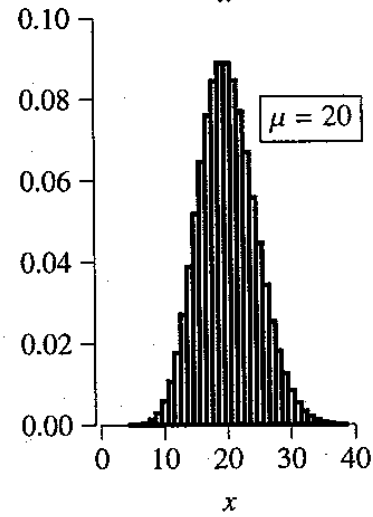
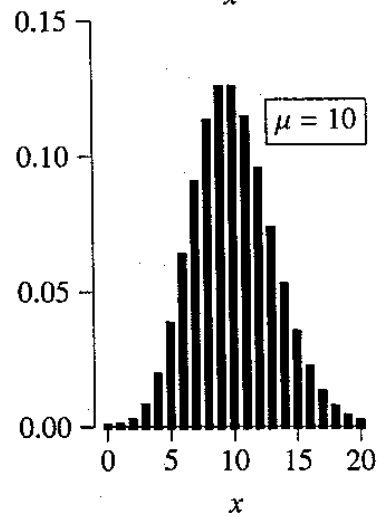
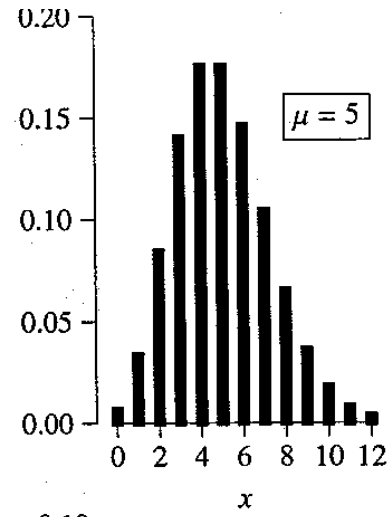
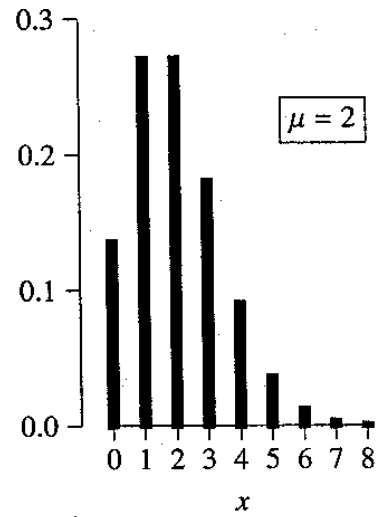
Distribution de Poisson

Elle résulte d'une simplification de la distribution binomiale sous les conditions que n est grand et p petit \rightarrow

$$P(x) = \frac{n!}{(n-x)!x!} p^x (1-p)^{n-x} = \frac{n!}{(n-x)!n^x} \frac{1}{x!} (np)^x e^{-pn} = \frac{(pn)^x e^{-pn}}{x!}$$

$$P(x) = \frac{(\bar{x})^x e^{-\bar{x}}}{x!} \quad \text{avec} \quad \bar{x} = pn$$
$$\sigma^2 = pn = \bar{x}$$

Exemples de distributions de Poisson



Distribution de Poisson pour les désintégrations nucléaires

- 4 conditions:
- les atomes sont identiques
 - les atomes sont indépendants
 - la vie moyenne des atomes est longue
 - le nombre d'atomes est élevé

→ la probabilité d'observer x désintégrations dans un intervalle de temps T :

$$P_x(T) = \frac{(aT)^x}{x!} e^{-aT}$$

avec a le nombre moyen de désintégrations par unité de temps

$$\rightarrow \bar{x} = aT$$

Distribution des intervalles de temps: Distribution d'Erlang (1)

- La probabilité de n'avoir aucun événement dans un intervalle de temps $[0, t]$ est e^{-at}
- La probabilité d'avoir exactement 1 un événement en dt est adt
- La probabilité combinée d'observer la 1^{ère} désintégration dans l'intervalle $[t, t+dt]$ est
$$f_1(t)dt = e^{-at}adt$$
- $f_1(t)$ est la densité de probabilité de la variable aléatoire t définie comme le temps entre 2 désintégrations successives
- Détermination de la densité de probabilité $f_k(t)$ de l'intervalle de temps t entre 1 désintégration arbitraire et la $k^{\text{ème}}$ suivante


Distribution des intervalles de temps: Distribution d'Erlang (2)

- Soit $F_k(t)$: la fonction de distribution cumulée (probabilité d'observer k désintégrations dans un intervalle de temps $< t$ ou, de manière équivalente, d'obtenir au moins k désintégrations dans un intervalle de temps $[0 t]$):

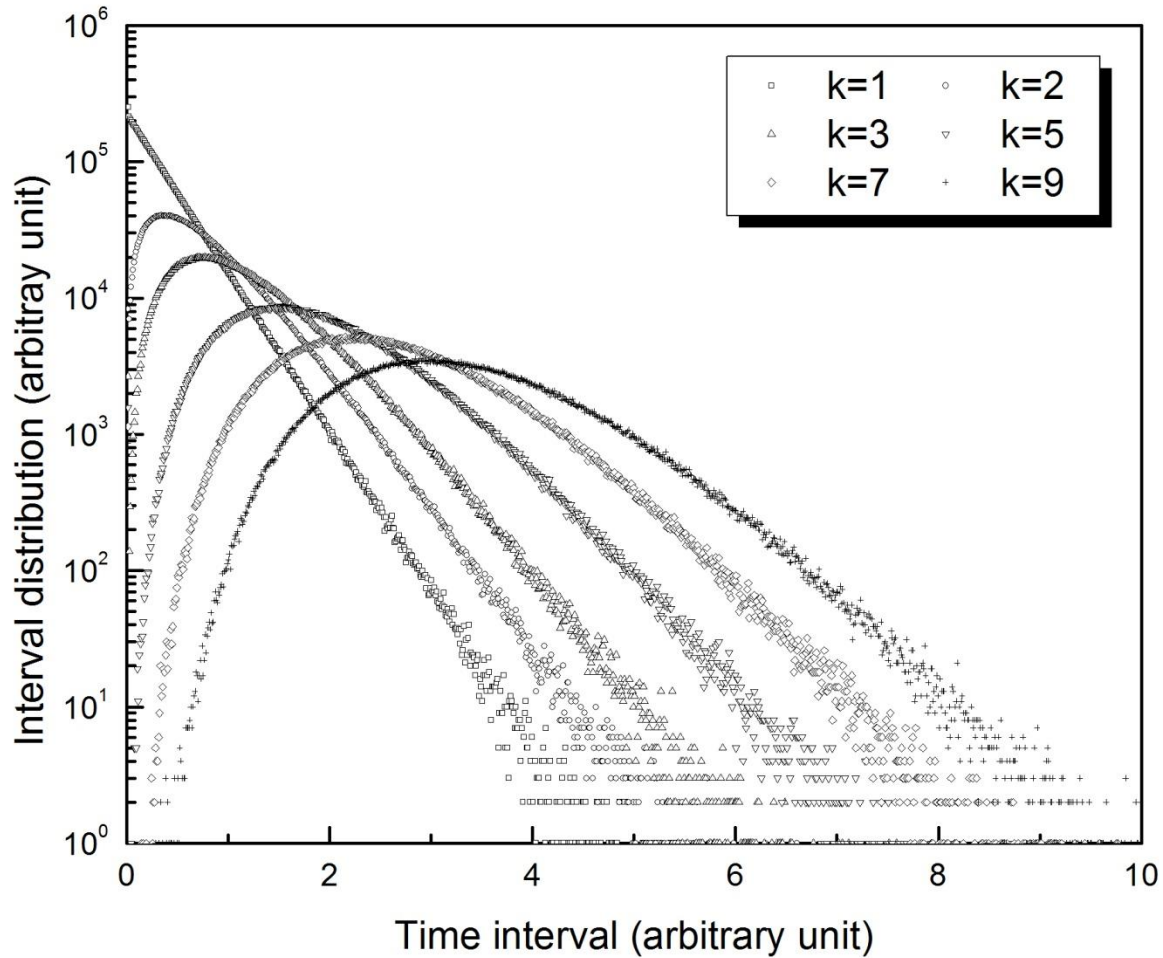
$$F_k(t) = \int_0^t f_k(t) dt = 1 - \sum_{x=0}^{k-1} \frac{(at)^x}{x!} e^{-at}$$

- En sachant que:

$$\sum_{x=0}^{k-1} \frac{(at)^x}{x!} e^{-at} = \int_{at}^{\infty} \frac{z^{k-1}}{(k-1)!} e^{-z} dz \quad \text{et} \quad \int_0^{\infty} \frac{z^{k-1}}{(k-1)!} e^{-z} dz = 1$$


$$f_k(t) dt = \frac{(at)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-at} a dt$$

Exemples de distributions d'Erlang



Distributions des intervalles de temps pour (\square) $k = 1$; (\circ) $k = 2$; (\triangle) $k = 3$; (∇) $k = 5$; (\diamond) $k = 7$ et ($+$) $k = 9$

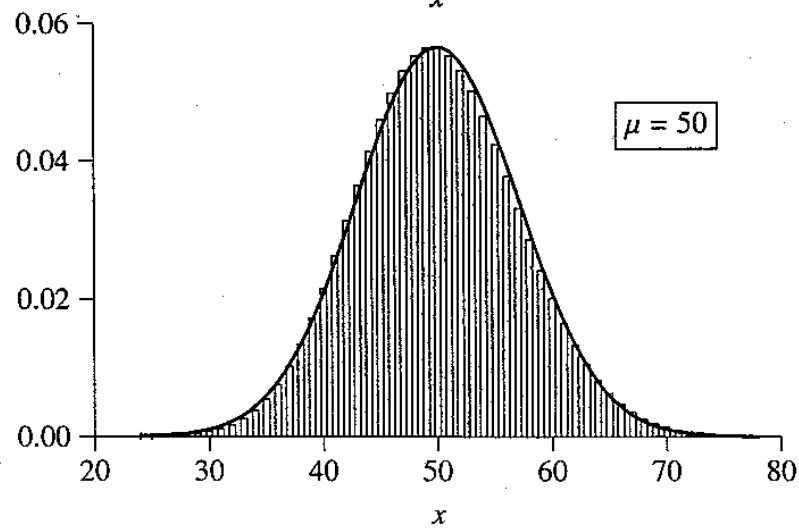
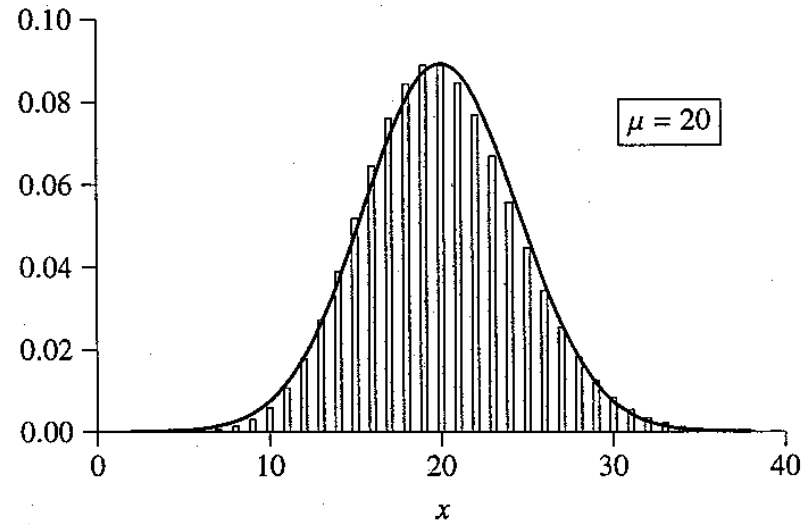
Distribution gaussienne (ou normale) (1)

Si p est petit et que la valeur moyenne de la distribution est grande ($> \sim 20$) \rightarrow

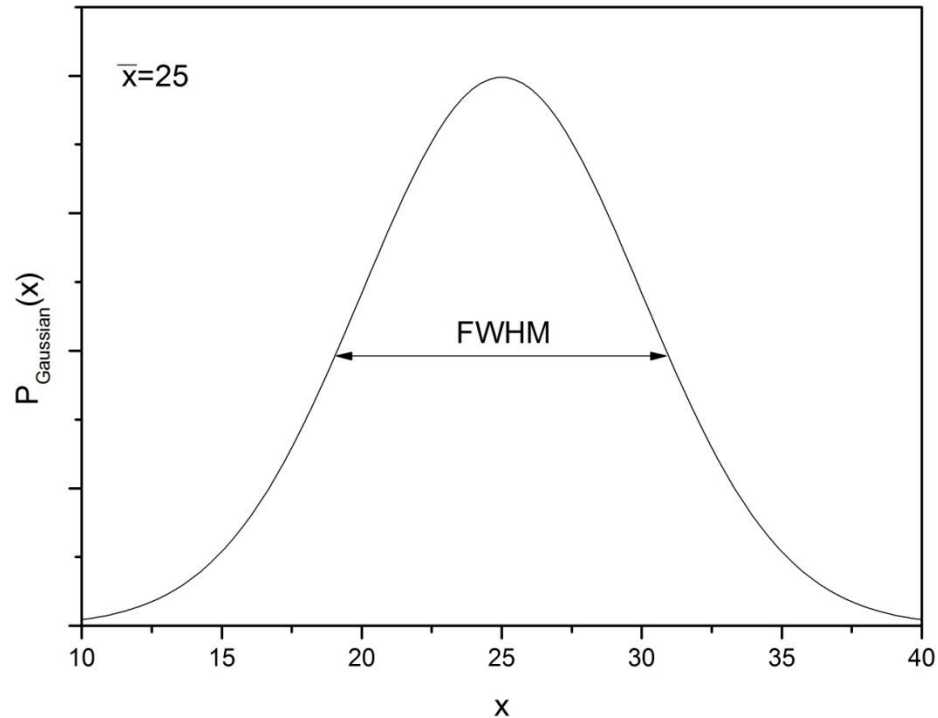
$$P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\bar{x}}} \exp\left(-\frac{(x - \bar{x})^2}{2\bar{x}}\right)$$

Supposition valable en toute situation pour laquelle on accumule un nombre relativement important d'événements pendant la mesure

Comparaison Poisson - gaussienne



Distribution gaussienne (ou normale) (2)



Largeur à mi-hauteur (Full width at half maximum ou FWHM)

$$\text{FWHM} = 2\sqrt{2 \ln 2} \sigma = 2.355\sigma \text{ avec } \sigma = \sqrt{\bar{x}}$$

Loi de filiation radioactive: constante de désintégration

- Soit λ , la probabilité de désintégration par unité de temps $\rightarrow \lambda$ est appelée la constante de désintégration
- Par conséquent λdt est la probabilité de désintégration d'un noyau dans l'intervalle de temps dt
- Application de la distribution de Poisson \rightarrow la probabilité de survie d'un noyau à l'instant t sachant qu'il existait en $t = 0 \rightarrow$

$$P_0(t) = e^{-\lambda t}$$

- Si N_0 est le nombre initial (en $t = 0$) de noyaux non-désintégrés \rightarrow le nombre de noyaux $N(t)$ qui survivent en t est

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$$

Demi-vie et activité

- La demi-vie $T_{1/2}$ est la durée au bout de laquelle le nombre de noyaux présents est réduit de moitié →

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}$$

- L'activité $A(t)$ à l'instant t est définie comme le nombre moyen de désintégrations par unité de temps →

$$A(t) = \lambda N(t)$$

- L'unité d'activité est le becquerel (Bq) → 1 Bq = 1 désintégration par seconde (ancienne unité → le Curie (Ci) correspondant à l'activité de 1 g de ^{226}Ra → 1 Ci = 3.7×10^{10} Bq)

Filiation radioactive (1)

- Supposons $\rightarrow X_1 \xrightarrow{\lambda_1} X_2 \xrightarrow{\lambda_2} X_3$
- Le nombre de X_1 (« parent ») décroît selon la loi exponentielle \rightarrow

$$\frac{dN_1}{dt} = -\lambda_1 N_1 \rightarrow N_1(t) = N_1(0)e^{-\lambda_1 t}$$

- Le nombre de X_2 (« fille ») s'accroît par désintégration du X_1 et se désintègre avec une constante de désintégration $\lambda_2 \rightarrow$

$$\frac{dN_2}{dt} = -\lambda_2 N_2 + \lambda_1 N_1 = -\lambda_2 N_2 + \lambda_1 N_1(0)e^{-\lambda_1 t}$$

- Avec comme solution \rightarrow

$$N_2(t) = N_2(0)e^{-\lambda_2 t} + \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} N_1(0) (e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t})$$

Filiation radioactive (2)

- Le nombre de X_3 évolue comme

$$\frac{dN_3}{dt} = \lambda_2 N_2$$



$$N_3(t) = N_3(0) + N_2(0) (1 - e^{-\lambda_2 t}) + N_1(0) \left(1 - \frac{\lambda_2 e^{-\lambda_1 t} - \lambda_1 e^{-\lambda_2 t}}{\lambda_1 - \lambda_2} \right)$$

- En pratique \rightarrow mesures des activités $A_1 = \lambda_1 N_1$ et $A_2 = \lambda_2 N_2 \rightarrow$
en supposant $N_2(0) = N_3(0) = 0 \rightarrow$

$$A_1(t) = A_1(0)e^{-\lambda_1 t} \quad \text{et} \quad A_2(t) = \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} A_1(0) (e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t})$$

Equilibres (1)

- On constate que $A_1(t)$ est maximum en $t = 0$ et nulle en $t = \infty$ et que $A_2(t)$ est nulle en $t = 0$ et $t = \infty$ et $\rightarrow A_2(t)$ passe par un maximum pour $dA_2(t)/dt = 0 \rightarrow$

$$\frac{d(A_2)}{dt} = 0 = -\lambda_1 e^{-\lambda_1 t_m} + \lambda_2 e^{\lambda_2 t_m}$$



$$t_m = \frac{\ln \lambda_2 / \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}$$

- Ce maximum se produit lorsque les activités du parent et de la fille sont égales $\rightarrow A_1(t_m) = A_2(t_m)$

$$e^{-\lambda_1 t_m} = \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} (e^{-\lambda_1 t_m} - e^{\lambda_2 t_m})$$



$$t_m = \frac{\ln \lambda_2 / \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}$$

Equilibres (2)

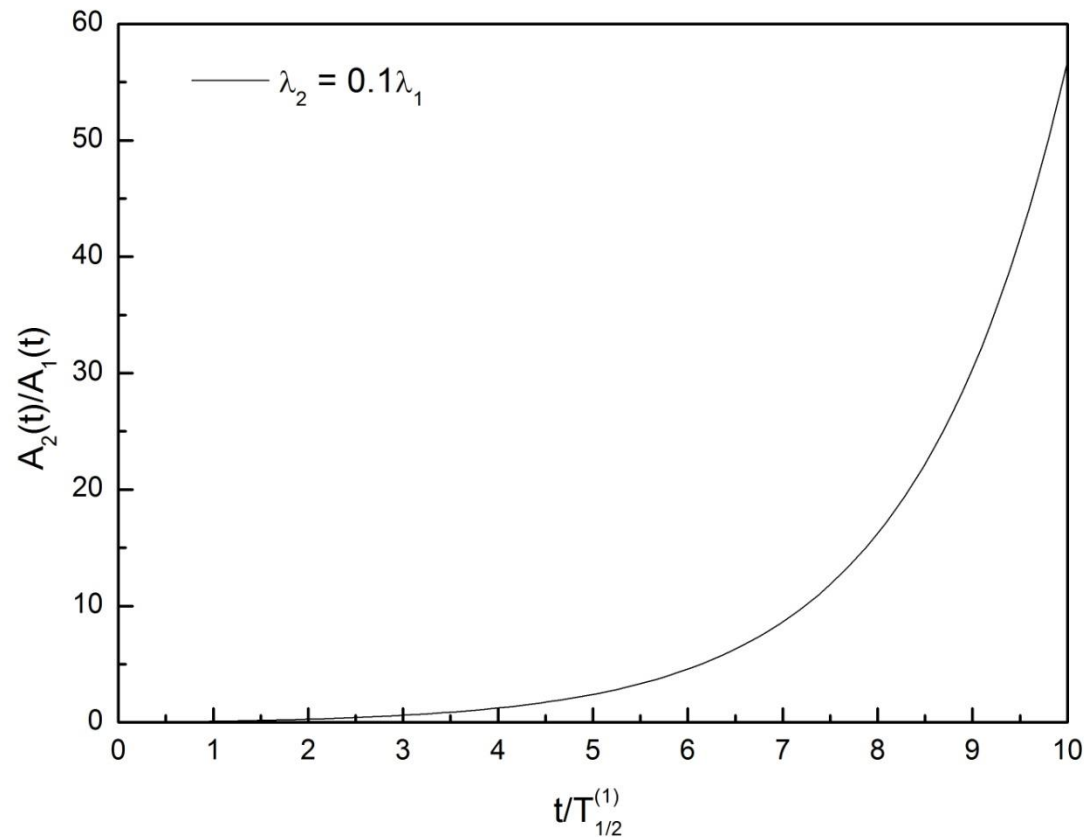
- En $t_m \rightarrow$ on parle « d'équilibre idéal »
- Le rapport des activités de X_2 et X_1 vaut \rightarrow

$$\frac{A_2(t)}{A_1(t)} = \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} \left(1 - e^{-(\lambda_2 - \lambda_1)t} \right)$$

- Pour $t < t_m \rightarrow$ toujours $A_1 > A_2$
- Pour $t > t_m \rightarrow$ toujours $A_1 < A_2$
- La relation spécifique entre parent et fille dépend des grandeurs relatives de leur constante de désintégration \rightarrow 3 cas sont à considérer \rightarrow
 1. $\lambda_2 < \lambda_1$
 2. $\lambda_2 > \lambda_1$
 3. $\lambda_2 \gg \lambda_1$

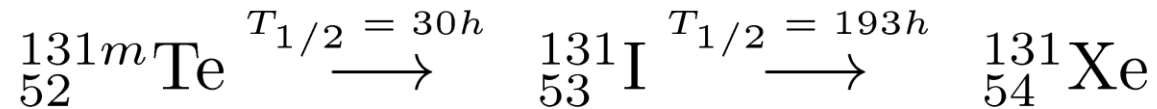
Non-équilibre: $\lambda_2 < \lambda_1$

- Les isotopes X_1 se désintègrent plus vite les produits de filiation $X_2 \rightarrow$ le rapport des activité augmente sans limite

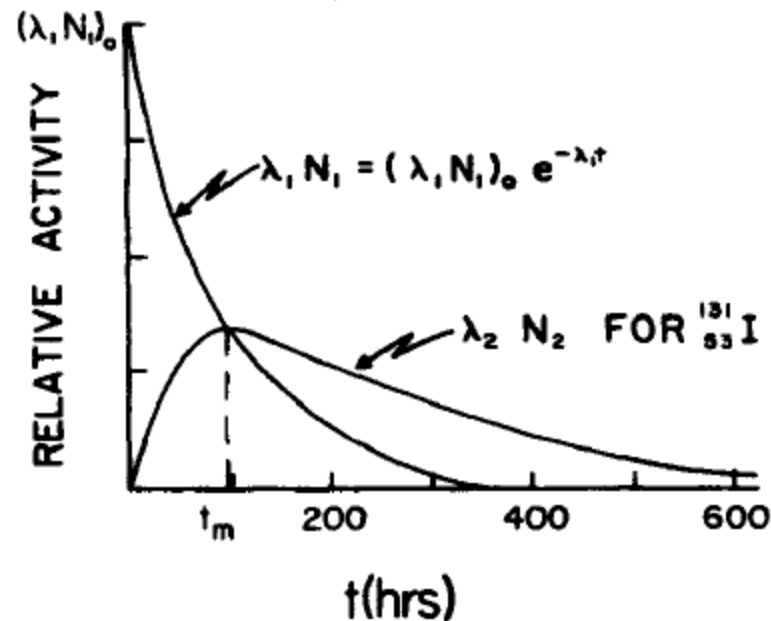


Exemple de cas pour lequel $\lambda_2 < \lambda_1$

- Désintégration du tellure métastable \rightarrow



- On a donc $\rightarrow \lambda_1 = 2.31 \cdot 10^{-2} \text{ h}^{-1}$ et $\lambda_2 = 3.59 \cdot 10^{-3} \text{ h}^{-1}$

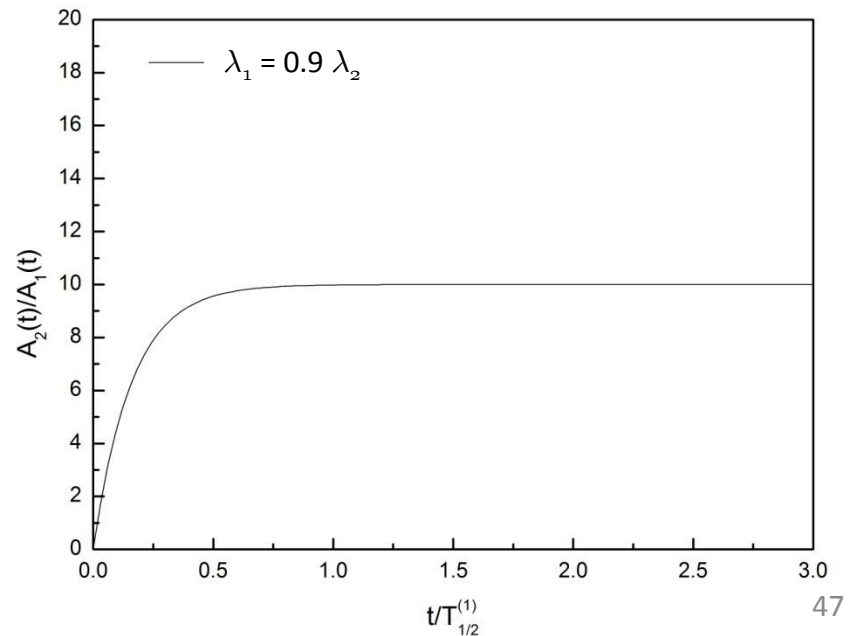


Équilibre transitoire: $\lambda_2 > \lambda_1$

- Le rapport des activité augmente avec le temps et tend vers une limite constante \rightarrow pour $t \rightarrow \infty$:

$$\frac{A_2(t)}{A_1(t)} \underset{\sim}{=} \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1}$$

- L'activité de la fille décroît à la même vitesse que celle du parent \rightarrow cet équilibre de régime est appelé équilibre transitoire

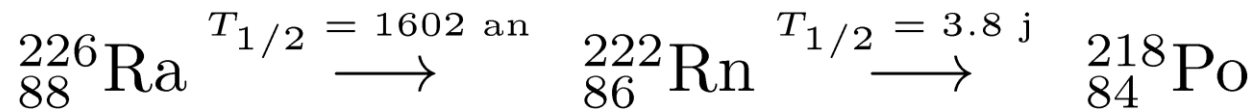


Équilibre séculaire: $\lambda_2 \gg \lambda_1$

- Le rapport des activités augmente avec le temps et tend vers 1 pour $t \rightarrow \infty$:

$$\frac{A_2(t)}{A_1(t)} \simeq 1$$

- Les activités du parent et de la fille deviennent égales \rightarrow équilibre séculaire
- Exemple \rightarrow désintégration du radium \rightarrow



- On a donc $\rightarrow \lambda_1 = 1.18 \cdot 10^{-6} \text{ j}^{-1}$ et $\lambda_2 = 1.81 \cdot 10^{-1} \text{ j}^{-1}$