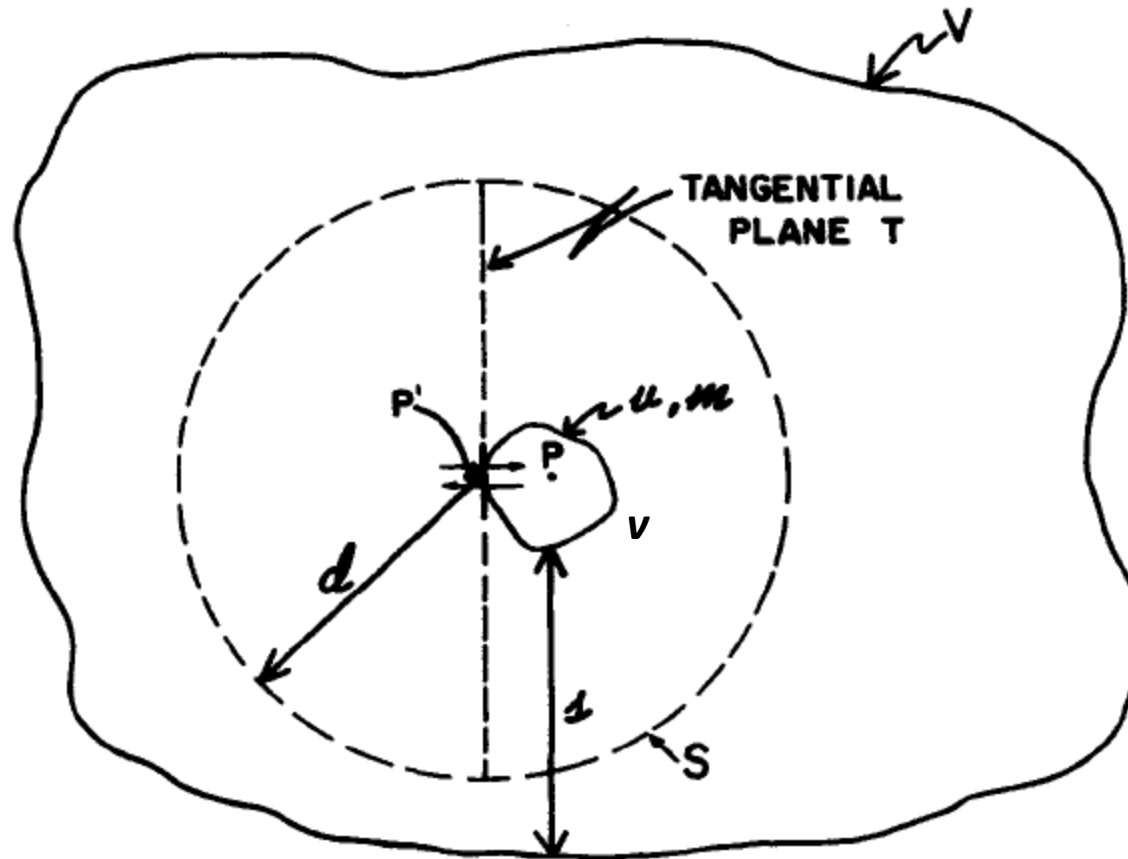


# Chapitre IV: Notions d'équilibre

# Introduction

- Relations d'équilibre permettent de relier certaines quantités de base
- L'équilibre des rayonnements — Radiation Equilibrium (RE) — permet d'égaliser la dose absorbée à la masse au repos nette convertie en énergie dans l'unité de masse autour du point considéré
- L'équilibre des particules chargées — Charged-Particle Equilibrium (CPE) — permet d'égaliser la dose absorbée  $D$  au kerma collisionnel  $K_c$
- Simplification du calcul de dose quand CPE ou RE est réalisé

# Équilibre des rayonnements (RE): géométrie



- Soit un volume  $V$  contenant une source radioactive distribuée dans le volume
- Soit un plus petit volume  $v$  entourant un point  $P$

## Conditions sur $V$

- $V$  est suffisamment grand pour que  $d$ , la distance maximale de pénétration des rayonnements émis par la source — les neutrinos exceptés — et des rayonnements diffusés et secondaires, est plus petite que  $s$ , la distance minimale entre les surfaces de  $v$  et  $V$
- Pour les particules chargées  $\rightarrow$  un parcours maximum existe  $\rightarrow$  la condition doit être réalisée exactement
- Pour les particules non-chargées  $\rightarrow$  atténuation  $\approx$  exponentielle  $\rightarrow$  la condition ne peut être réalisée exactement  $\rightarrow$  on choisit  $V$  suffisamment large pour avoir n'importe quelle réduction désirée du nombre de rayonnements entre les surfaces de  $v$  et  $V$

# Condition sur la source radiative distribuée

1. La composition atomique du milieu est uniforme
2. Le milieu est homogène, sa masse volumique est donc uniforme
3. La source est uniformément distribuée
4. Il n'y a aucun champ électrique ni magnétique extérieur susceptible de modifier la trajectoire des particules, excepté les champs produits par les atomes eux-mêmes et dont l'orientation est supposée aléatoire

# Équilibre des rayonnements

L'équilibre des rayonnements dans un volume  $v$  est réalisé si, en moyenne, il correspond à chaque particule entrant dans le volume  $v$  une particule identique en sortant

## Démonstration du RE

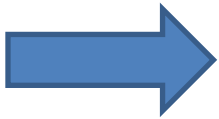
- Soient le point  $P'$  sur la surface du volume  $v$ , le plan tangent à  $v$  passant par  $P'$  et une sphère de centre  $P'$  et de rayon  $d$  (entièrement contenue dans  $V$  puisque  $d < s$ )
- La distribution de la source dans la sphère est parfaitement symétrique par rapport au plan tangent  $\rightarrow$  il y a autant de particules qui franchissent le plan au voisinage de  $P'$  dans les deux sens et cela pour tout type de particule et d'énergie
- Identique pour tous les points sur la surface de  $v$   $\rightarrow$  égalité des énergies radiantes entrante et sortante pour chaque type de particules, chargées (c) ou non (u)

## Dose absorbée en RE (1)

$$(R_{in})_u = (R_{out})_u$$

$$(R_{in})_c = (R_{out})_c$$

$$\bar{\epsilon} = R_{in} - R_{out} + \sum \bar{Q}$$



$$\bar{\epsilon} = \sum \bar{Q}$$



$$D = \frac{1}{\rho} \lim_{V \rightarrow 0} \overline{\left(\frac{\epsilon}{v}\right)} = \frac{1}{\rho} \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\sum \bar{Q}}{v} = \frac{d \sum \bar{Q}}{\rho dv}$$



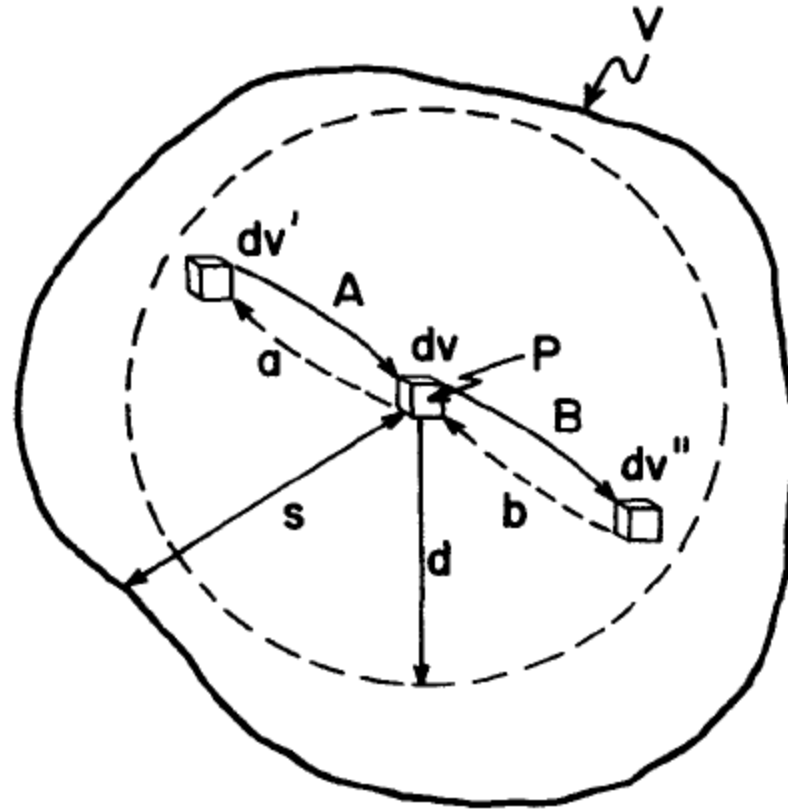
## Dose absorbée en RE (2)

Si l'équilibre des rayonnements existe en un point d'un milieu, la dose absorbée en ce point est la valeur moyenne de l'énergie libérée, par unité de masse en ce point, par les matériaux radioactifs, en ignorant les neutrinos

## Commentaires sur la condition 4.

- Si présence d'un champs magnétique et/ou électrique uniforme dans  $V \rightarrow$  l'argument de symétrie ne tient plus  $\rightarrow$  flux de particules chargées en  $P'$  n'est plus isotrope
- Cependant isotropie n'est pas une condition nécessaire pour le RE  $\rightarrow$  toute source d'anisotropie qui est **homogène** dans  $V$  n'aura pas d'influence sur le RE
- Pour le RE  $\rightarrow$  pas nécessaire que les flux entrants et sortants soient égaux pour tous les points de  $v \rightarrow$  RE est obtenu quand les flux entrant et sortant de  $v$  sont égaux (même si toutes les particules entrent d'un côté et sortent par l'autre)

## Démonstration (1)



- Soient  $dv$ , un volume élémentaire en  $P$  et deux volumes élémentaires,  $dv'$  et  $dv''$ , symétriques par rapport à  $dv$
- Distance entre  $dv$  et  $V$ :  $s > d$

## Démonstration (2)

- Les 3 premières conditions sont remplies mais pas la 4<sup>ème</sup> → présence d'un champs magnétique et/ou électrique uniforme et la source elle-même n'émet pas les rayonnements isotropiquement (mais l'anisotropie est homogène dans V)
- On suppose un déplacement  $G \Rightarrow D \rightarrow A=B$  et  $a=b \rightarrow a+B=A+b \rightarrow$  flux de  $dv$  vers  $dv'+dv'' =$  flux de  $dv'+dv''$  vers  $dv \rightarrow$  les volumes  $dv'$  et  $dv''$  peuvent être déplacés partout dans V (si en dehors de la sphère de rayon  $d \rightarrow$  rien ne vient de  $dv$ , ni n'arrive en  $dv$ ) et les flux peuvent être intégrés  $\rightarrow$  chaque flux in peut être remplacé par un flux out  $\rightarrow$  RE en  $P$

## Équilibre des particules chargées (CPE)

L'équilibre des particules chargées dans un volume  $v$  est réalisé si, en moyenne, il correspond à chaque particule chargée entrant dans le volume  $v$  une particule identique en sortant



$$(R_{in})_c = (R_{out})_c$$



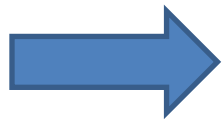
Clairement si **RE existe** → **CPE existe**  
Si RE absent → CPE peut exister

# Sources distribuées de particules

1. Source distribuée de particules chargées (+ pertes radiatives négligeables): Cas trivial  $\rightarrow$  seules des particules chargées sont émises et les pertes radiatives sont négligeables  $\rightarrow$  avec  $s > d$  et les 4 conditions précédentes  $\rightarrow$  CPE et RE existent pour le volume  $v$
2. Source distribuée de particules non-chargées: atteindre le CPE implique que RE est obtenu
3. Source distribuée de particules chargées et non-chargées: des particules chargées ainsi que des particules neutres très pénétrantes sont émises  $\rightarrow$  3 cas possibles

# Source distribuée de particules chargées et non-chargées

- a.  $d$  est le range maximum des particules chargées et  $V$  est juste assez grand pour que  $s > d \rightarrow$  non-chargées s'échappent de  $V$  sans interaction ( $\rightarrow$  sans produire de secondaires chargées)  $\rightarrow$  seules les primaires chargées doivent être considérées dans la symétrie  $\rightarrow$  CPE existe mais pas RE

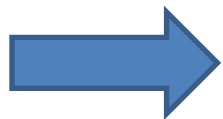


$$\begin{aligned}(R_{in})_u &< (R_{out})_u \\ (R_{in})_c &= (R_{out})_c\end{aligned}$$

Les particules non-chargées s'échappent de  $v$  et ne sont pas remplacées car pas de source en dehors de  $V \rightarrow$



$$\bar{\epsilon} = (R_{in})_u - (R_{out})_u + \sum \bar{Q}$$



$$D = \frac{d [(R_{in})_u - (R_{out})_u + \sum \bar{Q}]}{\rho dv}$$

## Source distribuée de particules chargées et non-chargées (2)

- b. Si  $V \nearrow$  jusqu'à être plus grand que le range « effectif » des particules non chargées et de leurs secondaires  $\rightarrow (R_{in})_u \nearrow$  jusqu'à avoir:

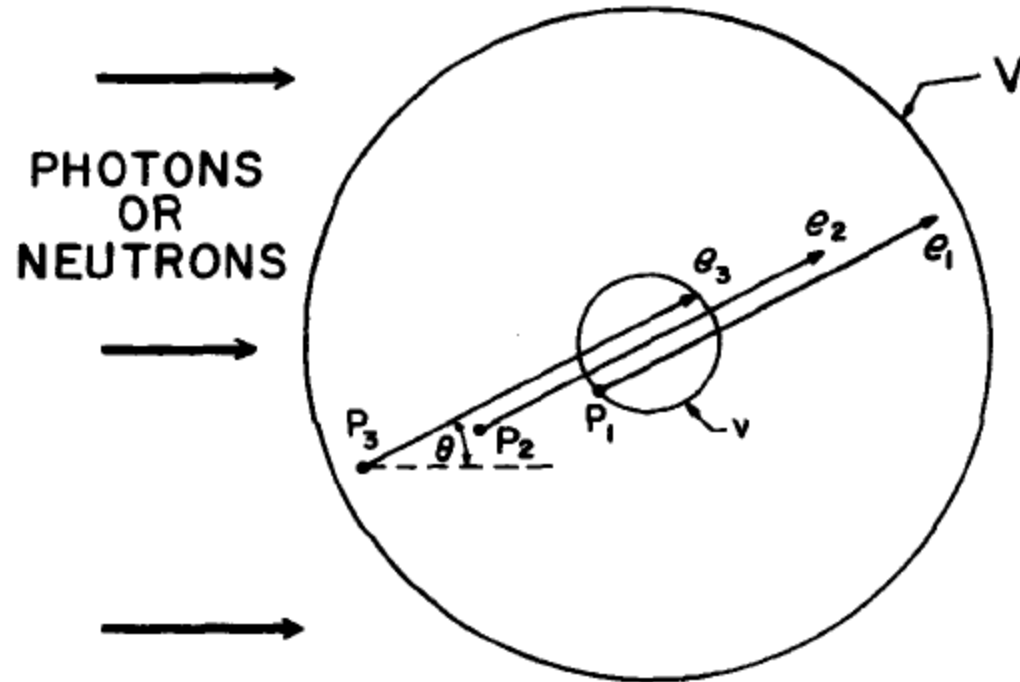
$$(R_{in})_u = (R_{out})_u$$

$\rightarrow$  RE est restauré

- c. Dans les cas intermédiaires ( $V$  assez grand pour CPE mais pas pour RE): difficultés  $\rightarrow$  une fraction de l' $E$  des particules non-chargées est déposée dans  $v$  mais difficile à déterminer (voir plus loin)



# Source extérieure de particules non-chargées



Dans  $V$ : volume  $v$  tel que la distance entre les 2 frontières est plus grande que le range maximum de toutes les **particules chargées** présentes

# Conditions nécessaires au CPE

1. La composition atomique du milieu est uniforme
2. Le milieu est homogène, sa masse volumique est donc uniforme
3. Le flux de particules non-chargées est uniforme et celles-ci sont très pénétrantes
4. Il n'y a aucun champ électrique/magnétique non-uniforme

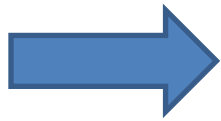
# Démonstrations

- Démonstration 1: flux de particules non-chargées uniforme + milieu homogène  $\rightarrow$  nombre de particules chargées produites par unité de volume est uniforme partout dans  $V$  mais production non-isotrope (distributions anisotropes de production de particules chargées par les particules non-chargées) mais anisotropie homogène  $\rightarrow$  les particules chargées ralentissent dans le milieu homogène  $\rightarrow$  CPE pour  $v$  (démonstration précédente)
- Démonstration 2: Particules chargées suivent une trajectoire rectiligne et toutes émises suivant un angle  $\theta$   $\rightarrow$  particules  $e_1$ ,  $e_2$  et  $e_3$   $\rightarrow$  les 3 déposent l' $E$  qui aurait été déposée par  $e_1$  si elle avait déposée toute son  $E$  dans  $v$   $\rightarrow$  de telles combinaisons sont toujours possibles  $\rightarrow$  CPE

## Dose absorbée en CPE

En CPE  $\rightarrow$  
$$\bar{\epsilon} = (R_{in})_u - (R_{out})_u + \sum \bar{Q}$$

avec  $\rightarrow$  
$$\bar{\epsilon}_{tr}^n = (R_{in})_u - (R_{out})_u^{nonr} - (R_{out})_u^{rad} + \sum \bar{Q}$$



$$\bar{\epsilon}_{tr}^n = \bar{\epsilon} + (R_{out})_u - (R_{out})_u^{nonr} - (R_{out})_u^{rad}$$

Rappel des 3 derniers termes  $\rightarrow$

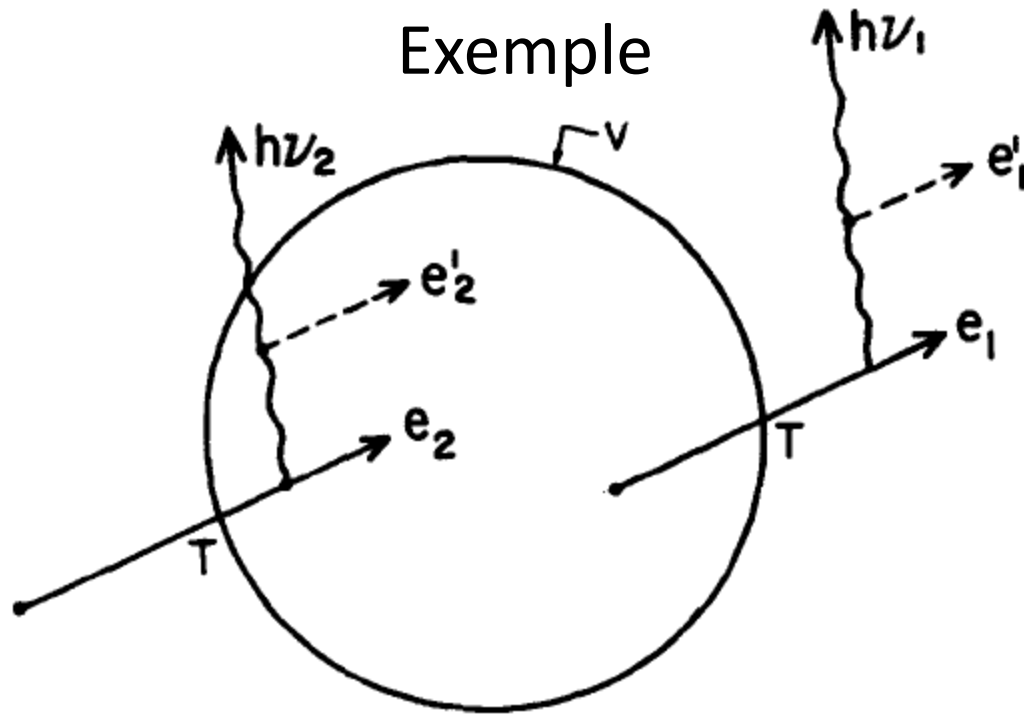
$(R_{out})_u$ :  $E$  radiante sortante de  $v$  pour des particules non-chargées

$(R_{out})_u^{nonr}$ :  $E$  radiante sortante pour des particules non-chargées qui n'inclut pas l'énergie provenant des pertes radiatives dans  $v$  subies par les particules mises en mouvement dans  $v$

$(R_{out})_u^{rad}$ :  $E$  radiante égale à la somme de toutes les pertes radiatives dans  $V$ , y compris  $v$ , subies par les particules mises en mouvement dans  $v$

## Dose absorbée en CPE (2)

- Pour  $v$  petit  $\rightarrow (R_{out})_u = (R_{out})_u^{nonr} + (R_{out})_u^{rad}$
- Démonstration: En CPE  $\rightarrow$  à toute particule chargée qui pénètre dans  $v$  correspond une particule identique de même  $E$  et de même direction qui quitte  $v$
- À cause des hypothèses (homogénéité)  $\rightarrow$  à tout événement qui se produit dans  $v$  correspond un événement identique qui se produit en dehors de  $v$
- Les particules non-chargées sont très pénétrantes  $\rightarrow$  pour  $v$  petit  $\rightarrow$  les particules non-chargées issues des pertes radiatives dans  $v$  s'échappent de  $v$  sans y subir d'interaction
- Les pertes radiatives dans  $v$  d'un  $e^-$  entrant contribuent à  $(R_{out})_u$  et les pertes radiatives identiques à l'extérieur de  $v$  dues aux  $e^-$  mis en mouvement dans  $v$  contribuent à  $(R_{out})_u^{rad}$  (pour  $(R_{out})_u^{nonr} = 0$ )
- L'homogénéité implique l'égalité de ces deux contributions à condition que les particules non-chargées produites dans  $v$  s'en échappent



Cas 1 (ligne pleine):  $h\nu_2$  s'échappe  $\rightarrow (R_{\text{out}})_u = h\nu_2$  mais  $(R_{\text{out}})_u^{\text{rad}} = h\nu_1$  et par définition:  $h\nu_1 = h\nu_2$  (avec  $(R_{\text{out}})_u^{\text{nonr}} = 0$ )

Cas 2 (ligne hachurée):  $h\nu_2$  est absorbé et produit  $e'_2 \rightarrow (R_{\text{out}})_u = 0$  mais  $(R_{\text{out}})_u^{\text{rad}} = h\nu_1$  comme avant (avec toujours  $(R_{\text{out}})_u^{\text{nonr}} = 0$ )  $\rightarrow$  équation non satisfaite  $\rightarrow v$  doit être suffisamment petit pour permettre l'échappement des pertes radiatives

## Dose absorbée en CPE (3)

$$\bar{\epsilon} = \bar{\epsilon}_{tr}^n$$

En réduisant  $v$  à  $dv$  ( $\rightarrow$  **petit** par définition), on peut écrire  $\rightarrow$

$$\frac{d\bar{\epsilon}}{dm} = \frac{d\bar{\epsilon}_{tr}^n}{dm}$$




$$D^{\text{CPE}} = K_c$$

## Dose absorbée en CPE (4)


À l'équilibre des particules chargées, la dose absorbée dans un milieu soumis à un flux uniforme de particules non chargées est égale au kerma collisionnel



## Dose $\leftrightarrow$ Fluence énergétique/fluence

Photons 

$$K_c = \Psi \left( \frac{\mu_{en}}{\rho} \right)_{E,Z}$$
$$\Rightarrow D \stackrel{\text{CPE}}{=} \Psi \left( \frac{\mu_{en}}{\rho} \right)_{E,Z}$$

Neutrons 

$$K = K_c$$
$$K = \Phi(F_n)_{E,Z}$$
$$K = \Phi \left( \frac{\mu_{tr}}{\rho} \right)_{E,Z} E$$
$$\Rightarrow D \stackrel{\text{CPE}}{=} \Phi \left( \frac{\mu_{tr}}{\rho} \right)_{E,Z} E$$

## Applications à deux milieux $\neq$

- Considérons une même fluence énergétique (photons) ou fluence (neutrons) dans 2 milieux (A et B) présentant des coefficients d'absorption massique en énergie moyens  $\neq$  (photons) ou des coefficients de Kerma moyens  $\neq$  (neutrons)  $\rightarrow$

- Photons:

$$\frac{D_A}{D_B} \stackrel{\text{CPE}}{=} \frac{(K_c)_A}{(K_c)_B} = \frac{\overline{(\mu_{en}/\rho)_A}}{\overline{(\mu_{en}/\rho)_B}}$$

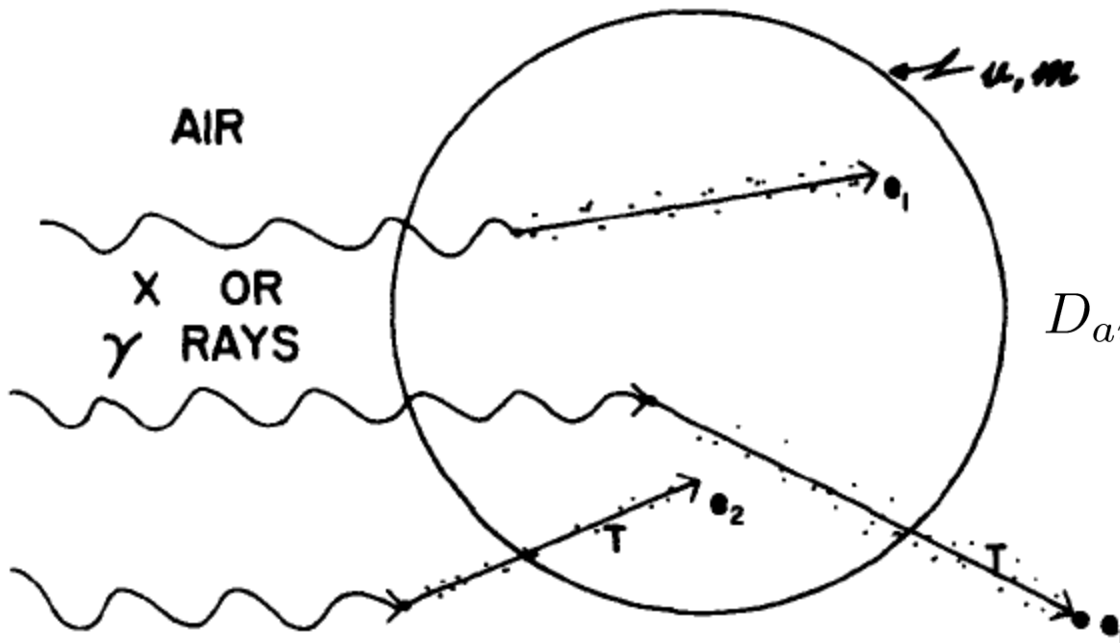
- Neutrons:

$$\frac{D_A}{D_B} \stackrel{\text{CPE}}{=} \frac{K_A}{K_B} = \frac{\overline{(F_n)_A}}{\overline{(F_n)_B}}$$

- $D_A \neq D_B$  car compositions atomiques  $\neq$  ou spectres énergétiques  $\neq$

# Application du CPE à l'exposition

- Définition de l'exposition → mesures des ionisations produites **partout** par tous les  $e^-$  secondaires libérés dans le volume défini
- En CPE (dans une chambre d'ionisation **petite**) → mesure de l'ionisation collectée dans le volume d'air défini



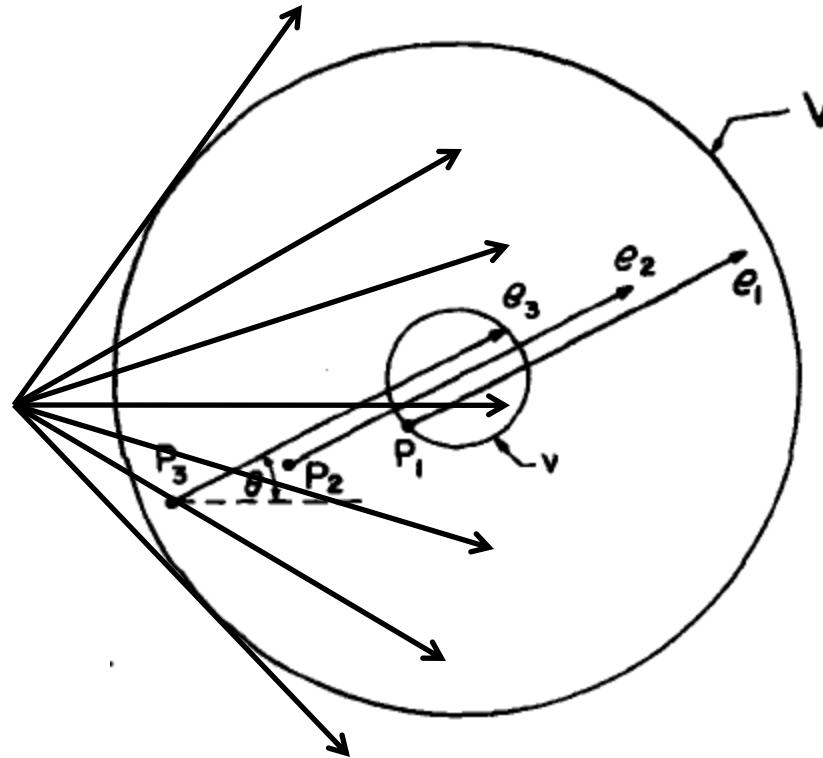
$$D_{air} \stackrel{\text{CPE}}{=} (K_c)_{air} = X \left( \frac{W}{e} \right)_{air}$$

# Limites de validité du CPE pour des particules non-chargées

1. Inhomogénéité de la composition atomique dans  $V$
2. Inhomogénéité de la densité en  $V$
3. Non-uniformité du champs de particules non-chargées dans  $V$
4. Présence d'un champ électrique/magnétique non-uniforme en  $V$

## Limites de validité du CPE: en pratique

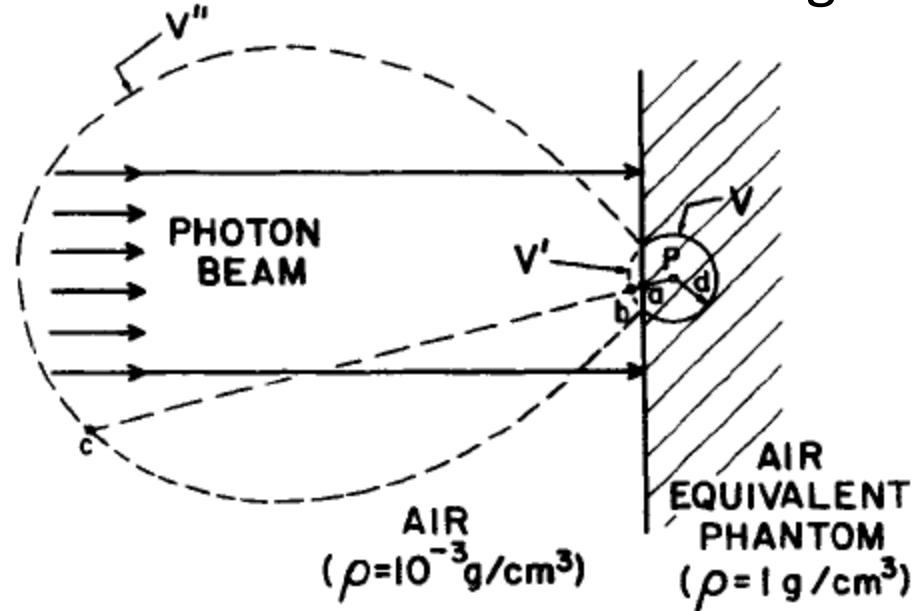
- Proximité de la source



- Si source trop proche  $\rightarrow$  fluence énergétique non-uniforme  $\rightarrow$  nombre de  $e_3 >$  nombre de  $e_1 \rightarrow$  suppression de CPE

## Limites de validité du CPE: en pratique (2)

- Proximité d'une frontière ou d'une inhomogénéité



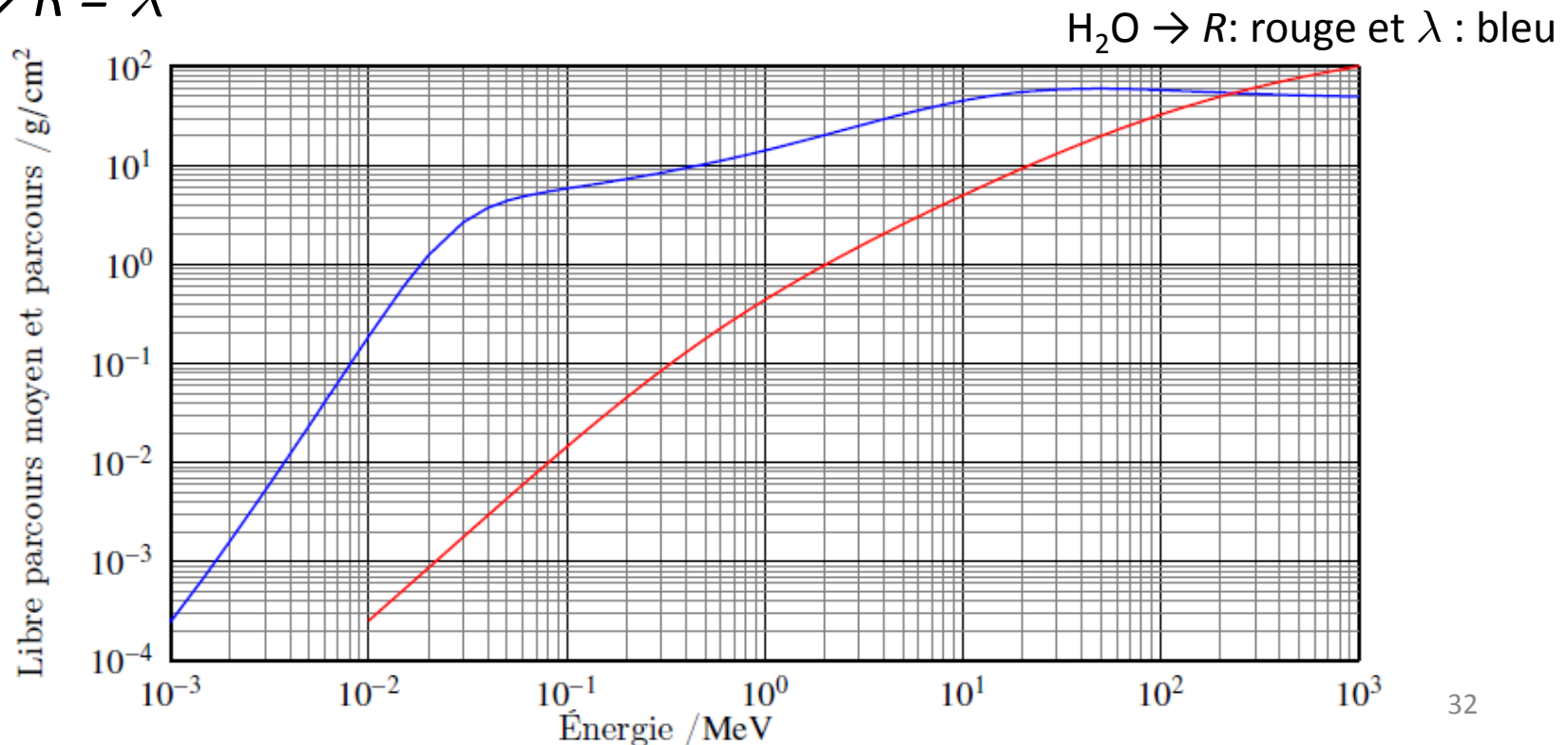
- Fantôme de même composition atomique que l'air  $\rightarrow$  seule la densité change (facteur 1000)
- Pour remplacer  $V'$  manquant dans le solide  $\rightarrow V''$  1000 x plus grand (densité 1000 x plus petite)  $\rightarrow e^-$  partant de  $b$  si solide doit partir de  $c$  dans l'air  $\rightarrow$  faisceau pas assez large pour irradier  $c$  bien qu'il irradie  $b \rightarrow V''$  non irradié de manière homogène  $\rightarrow$  suppression de CPE au voisinage de la surface

## Limites de validité du CPE: en pratique (3)

- De plus  $\rightarrow$  même si  $V''$  était uniformément irradié  $\rightarrow e^-$  diffusé près de  $c$  raterait le fantôme alors qu'un même  $e^-$  diffusé près de  $b$  d'un même angle atteindrait le volume
- Suppression de CPE due au changement de densité à la frontière et à des facteurs géométriques

## Limites de validité du CPE: en pratique (4)

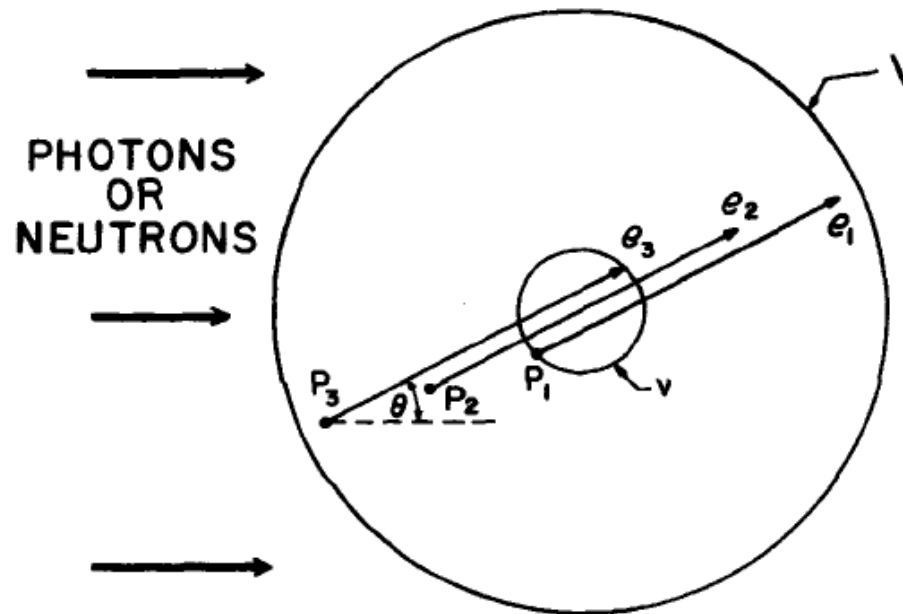
- Énergie élevée  $\rightarrow$  Suppression de CPE
- Le range  $R$  d'un  $e^-$  augmente plus vite en fonction de l' $E$  que le libre parcours moyen  $\lambda$  d'un photon  $\rightarrow$  Pour  $E \approx 200$  MeV  $\rightarrow R = \lambda$





## Limites de validité du CPE: en pratique (5)

- $s > d$  est toujours nécessaire  $\rightarrow$  mais le long de  $d$ : atténuation du faisceau de particules non-chargées



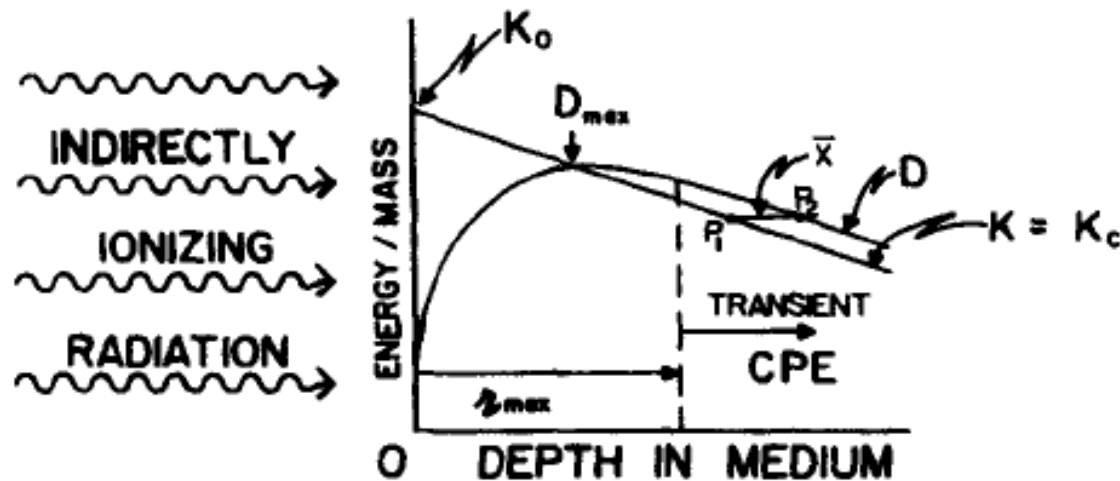
- Nombre de particules chargées générées en  $P_3 >$  qu'en  $P_1 \rightarrow$  Suppression de CPE (d'autant plus que  $E \nearrow$ )

## Limites de validité du CPE: en pratique (6)

- On considère donc qu'une mesure d'exposition ne peut se faire que pour des  $\gamma$  ou RX avec  $E < 3 \text{ MeV}$
- Pour  $E > 3 \text{ MeV} \rightarrow$  la définition de l'exposition est toujours valable mais sa mesure ne peut se faire (car elle dépend du CPE)
- Si on peut établir une « autre » relation entre  $D_{air}$  et  $(K_c)_{air}$  (éventuellement plus compliquée qu'une simple  $=$ )  $\rightarrow$  l'exposition peut être mesurée  $\rightarrow$  situation appelée équilibre transitoire des particules chargées (Transient Charged-Particle Equilibrium ou TCPE )

# Équilibre transitoire des particules chargées (TCPE)

- TCPE existe si, pour tous les points d'une région, il existe une relation  $D = \beta K_c$  avec  $\beta > 1$

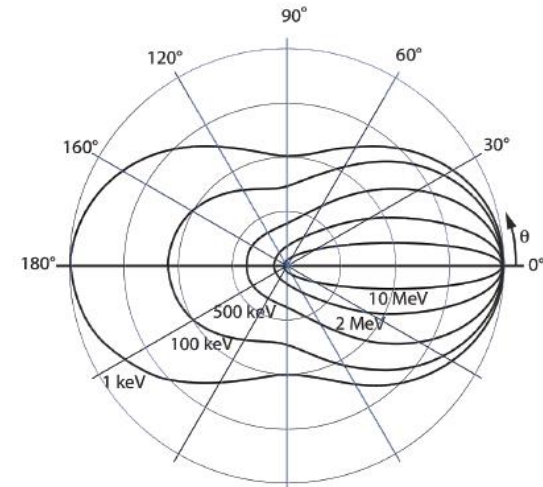
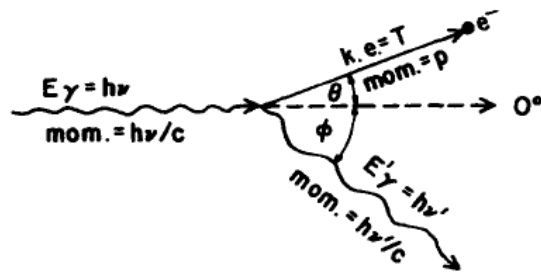


- Considérons une géométrie à faisceau large: faisceau incident de particules non-chargées  $\perp$  à un matériau et supposons  $K = K_c$
- Kerma à la surface:  $K_0 \rightarrow$  atténuation exponentielle (courbe  $K$ )

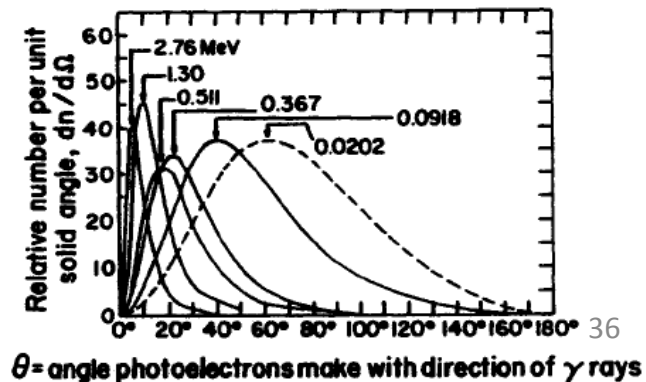
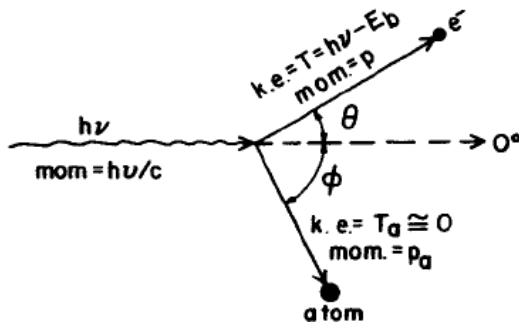
# Équilibre transitoire des particules chargées (2)

- La dose  $D \nearrow$  d'abord avec la profondeur (avec  $\beta < 1$ )  $\rightarrow$  population de particules chargées se déplaçant vers la droite  $\nearrow$  pour un nombre d'interactions des particules non-chargées qui  $\nearrow \rightarrow$  contribution à la dose qui augmente

## Compton



## Photoélectrique



## Équilibre transitoire des particules chargées (3)

- La dose atteint un maximum  $D_{max}$  correspondant à un équilibre  $\rightarrow$  l'augmentation des particules chargées est balancée par l'atténuation du faisceau de particules non-chargées dans le matériau
- $D_{max}$  se produit environ lorsque  $D$  croise  $K$  (sauf si le faisceau incident est « contaminé » par des particules chargées  $\rightarrow D_{max}$  est déplacé vers la surface et  $D \neq K$  à  $D_{max}$ )
- $r_{max}$  correspond à la distance maximale que les particules chargées secondaires créées à la surface peuvent parcourir dans la direction du faisceau incident
- Après  $r_{max} \rightarrow D \searrow$  et devient  $\parallel$  à  $K$  (même si la pente peut changer avec la profondeur)  $\rightarrow$  TCPE
- $D > K$  dû aux rétrodiffusés

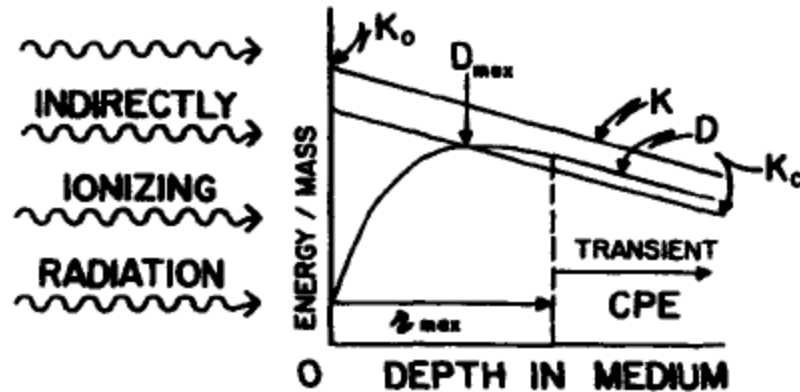
## Équilibre transitoire des particules chargées (4)

$$D \stackrel{\text{TCPE}}{=} K_c e^{\mu' \bar{x}}$$
$$\stackrel{\text{TCPE}}{=} K_c (1 + \mu' \bar{x})$$

- Les interactions radiatives sont négligées
- $\mu'$  est la pente de  $K$  ( $K_c$ ) et  $D$
- $\bar{x}$  est la distance moyenne le long de laquelle les particules chargées secondaires transportent leur énergie cinétique, dans la direction du faisceau incident (distance entre  $P_1$  et  $P_2$  pour lesquels  $K$  et  $D$  sont = )
- $\bar{x}$  et  $\mu'$  ne sont pas toujours connus

# Équilibre transitoire des particules chargées (5)

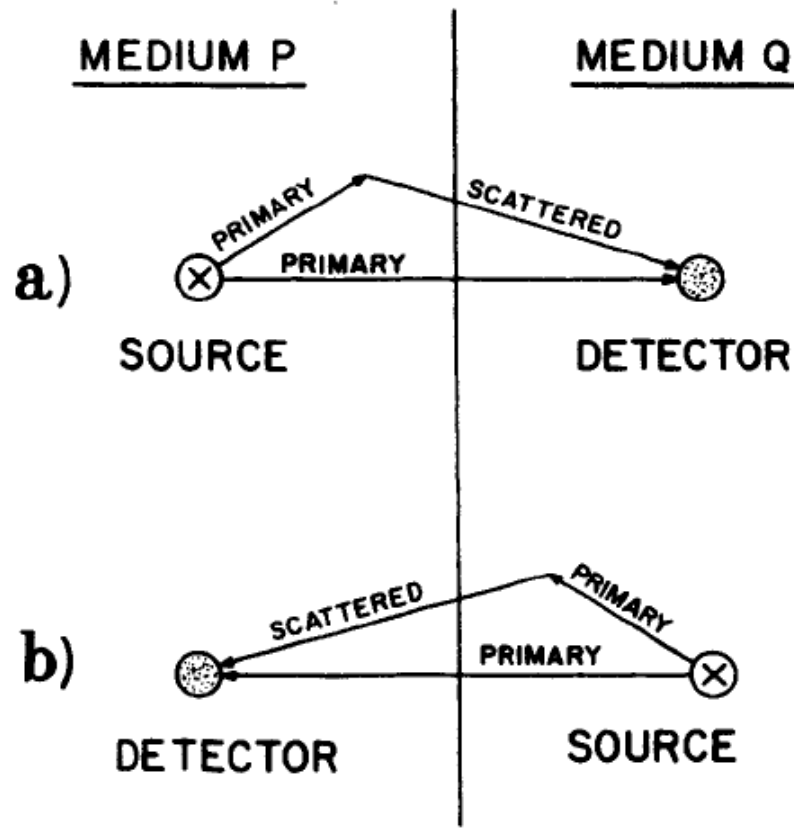
- Si  $K_r$  n'est pas négligeable →



- $K$  est supérieur à  $K_c$  et  $D$  d'une valeur:  $K_r = [(\mu_{tr} - \mu_{en}) / \mu_{tr}] K$  si les photons produits lors des pertes radiatives s'échappent du milieu

# Théorème de réciprocité: milieu infini et homogène

- Cas évident: *Interchanger les positions d'un détecteur ponctuel et d'une source ponctuelle dans un milieu infini et homogène ne modifie pas la quantité de rayonnements détectés*





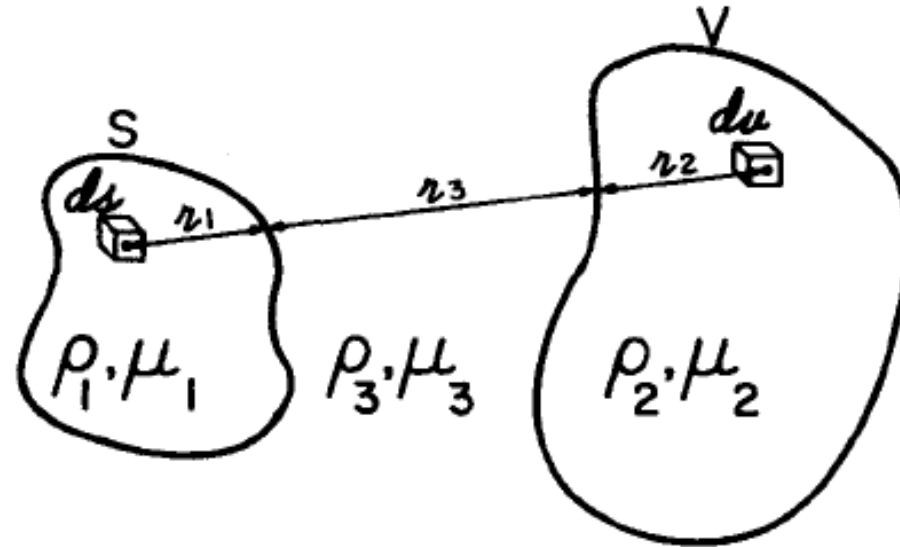
# Théorème de réciprocité: milieu infini non-homogène

- Avec  $P \neq Q$  (propriétés de diffusion et/ou d'atténuation  $\neq$ )  $\rightarrow$  la transmission des rayonnements primaires est identiques
- Avec  $P \neq Q \rightarrow$  création et/ou transmission de diffusés *peut* différer
- Si les rayonnements primaires dominant ou si la propagation des secondaires n'est pas « trop »  $\neq$  dans les 2 milieux  $\rightarrow$  le théorème de réciprocité reste valide

# Théorème de réciprocité: source et détecteur non-ponctuels

- La dose intégrale dans un volume  $V$  due à source de rayonnements  $\gamma$  uniformément distribuée dans le volume source  $S$  est égale à la dose intégrale qui serait mesurée en  $S$  si la même densité d'activité par unité de masse était distribuée dans le volume  $V$
- Théorème de Mayneord  $\rightarrow$  « dose » exprimée en roentgens  $\rightarrow$  implicitement  $S$  et  $V$  sont constitués d'air
- Théorème valide si  $\mu_{\text{en}}/\rho$  identique pour les milieux  $S$  et  $V$
- Théorème valide aussi pour des neutrons

# Démonstration du théorème de Mayneord (1)



- Toutes les régions sont homogènes
- S contient une source uniformément distribuée de rayonnements  $\gamma$  d'activité spécifique  $A'$  (Bq/kg)  $\rightarrow$  l'élément de volume  $ds$  ( $m^3$ ) a une activité  $dA = A' \rho_1 ds$  (Bq)
- Chaque désintégration émet un rayon  $\gamma$  d'une énergie  $E$  constante (MeV), même si le théorème est valide pour une source multiénergétique
- Atténuation en faisceau étroit est considérée  $\rightarrow \mu_i$

## Démonstration du théorème de Mayneord (2)

- Soit un élément de volume  $dv$  dans  $V$  à une distance  $r = r_1 + r_2 + r_3$  de  $ds$
- Sans atténuation  $\rightarrow$  la fluence  $\Phi$  (photons) en  $dv$  pour un temps d'irradiation  $\Delta t$  (s)  $\rightarrow$

$$\Phi = \frac{dA\Delta t}{4\pi r^2}$$

- La fluence énergétique (MeV/m<sup>2</sup>)  $\rightarrow$

$$\Psi = \Phi E$$

- Le kerma collisionnel en  $dv$  (J/kg)

$$K_c = \Psi \left( \frac{\mu_{en}}{\rho_2} \right)_{E,V}$$

## Démonstration du théorème de Mayneord (3)

- Sous CPE  $\rightarrow K_c = D \rightarrow$  la dose  $D$  (MeV/kg) en  $dv$  due à la source en  $ds$  (sans atténuation)  $\rightarrow$

$$D = \frac{A' \rho_1 \Delta t E(\mu_{en}/\rho_2)_{E,V} ds}{4\pi r^2}$$

- Si atténuation des primaires seuls est considérée  $\rightarrow$  la dose totale  $D_{tot}$  en  $dv$  due à la source en  $S \rightarrow$

$$D_{tot} = \frac{A' \rho_1 \Delta t E(\mu_{en}/\rho_2)_{E,V}}{4\pi} \int_S \frac{e^{-(r_1\mu_1+r_2\mu_2+r_3\mu_3)}}{r^2} ds$$

- La dose intégrale (MeV):  $D(V,S) = \int D_{tot} \rho_2 dv \rightarrow$

$$D(V,S) = \frac{A' \rho_1 \rho_2 \Delta t E(\mu_{en}/\rho_2)_{E,V}}{4\pi} \int_V \int_S \frac{e^{-(r_1\mu_1+r_2\mu_2+r_3\mu_3)}}{r^2} dv ds$$

## Démonstration du théorème de Mayneord (4)

- La dose intégrale  $D(S,V)$  en  $S$  pour une source de même activité spécifique  $A'$  en  $V \rightarrow$

$$D(S, V) = \frac{A' \rho_1 \rho_2 \Delta t E (\mu_{en}/\rho_1)_{E,S}}{4\pi} \int_S \int_V \frac{e^{-(r_1 \mu_1 + r_2 \mu_2 + r_3 \mu_3)}}{r^2} ds dv$$

- $D(S,V) = D(V,S)$  si  $(\mu_{en}/\rho_1)_{E,S} = (\mu_{en}/\rho_2)_{E,V}$
- Théorème de Mayneord démontré pour des rayonnements primaires seulement, pour 2 volumes de même  $\mu_{en}/\rho$  et CPE
- Si milieu homogène  $\rightarrow$  réciprocity garantie pour les diffusés (arguments de symétrie)

## Corollaires du théorème de Mayneord

- Si  $S$  et  $V$  contiennent des activités totales uniformément distribuées identiques, chacune délivrera à l'autre la même dose absorbée moyenne
- Si toute l'activité en  $S$  est concentrée en 1 point interne  $P$ , alors la dose en  $P$  due à la source distribuée en  $V$  égale la dose moyenne en  $V$  résultant d'une source égale en  $P$
- La dose en tout point interne  $P$  en  $S$  due à une source uniformément distribuée en  $S$  elle-même est égale à la dose absorbée moyenne en  $S$  résultant de la même source concentrée en  $P$
- → utile pour des calculs de dose interne due à des sources distribuées dans le corps (même si, strictement parlant uniquement valide pour les primaires ou pour un milieu homogène infini )

# Théorème de réciprocité pour des particules chargées

- Pour des particules chargées dans un milieu infini et homogène → remplacement de l'atténuation exponentielle par une fonction empirique (méthode de Loevinger) → théorème de réciprocité valide pour les primaires et les diffusés
- Théorème de réciprocité dépend uniquement d'arguments de symétrie



# Application: dose absorbée dans un milieu radioactif

- Exemples de conditions CPE et RE pour des milieux radioactifs
- Importance de la taille du milieu
- Plus d'exemples aux exercices

## Taille du milieu

Considérons un milieu radioactif de forme sphérique et de rayon  $r$  qui émet à la fois des particules chargées et des  $\gamma$  (comme souvent)  $\rightarrow$  la taille de l'objet est primordiale

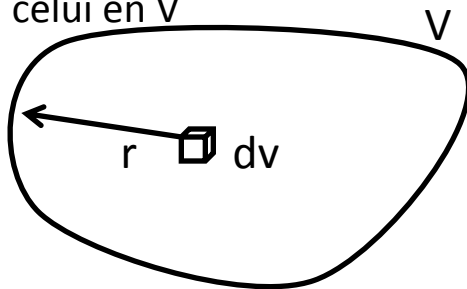
1.  $d < r \ll 1/\mu \rightarrow$  CPE: tous les  $\gamma$  s'échappent (et ne sont pas rétrodiffusée) et les particules chargées libérées en tout point  $P$  au moins à une distance  $d$  de la frontière déposent toute leur  $E \rightarrow D$  en  $P$  égale l' $E$  par unité de masse du milieu qui est cédée aux particules chargées lors de le désintégration (pertes radiatives négligées: vrai pour  $Z$  petit)
2.  $r \gg 1/\mu \rightarrow$  RE en tout point  $P$  suffisamment loin de la frontière  $\rightarrow D$  en  $P$  égale l' $E$  par unité de masse du milieu qui est cédée aux particules chargées et aux  $\gamma$  lors de le désintégration

## Taille du milieu (2)

3.  $r \sim 1/\mu \rightarrow$  plus difficile: une partie seulement des  $\gamma$  va déposer son  $E$  dans le milieu  $\rightarrow$  définition de la fraction absorbée (absorbed fraction -  $AF$ ):

$$AF = \frac{\text{énergie radiante des } \gamma \text{ absorbée dans le volume}}{\text{énergie radiante des } \gamma \text{ émise par la source}}$$

Milieu infini homogène et identique à celui en  $V$



$$AF_{dv,V} = \frac{\bar{\epsilon}_{dv,V}}{\bar{R}_{dv}}$$

Théorème de réciprocité  $\rightarrow \bar{\epsilon}_{dv,V} = \bar{\epsilon}_{V,dv}$   
(seulement approximé si vide à l'extérieur de  $V$ )

$$\rightarrow AF_{dv,V} = \frac{\bar{\epsilon}_{V,dv}}{\bar{R}_{dv}} \rightarrow AF = D \text{ en } P / D \text{ en } P \text{ avec RE}$$

## Fraction absorbée

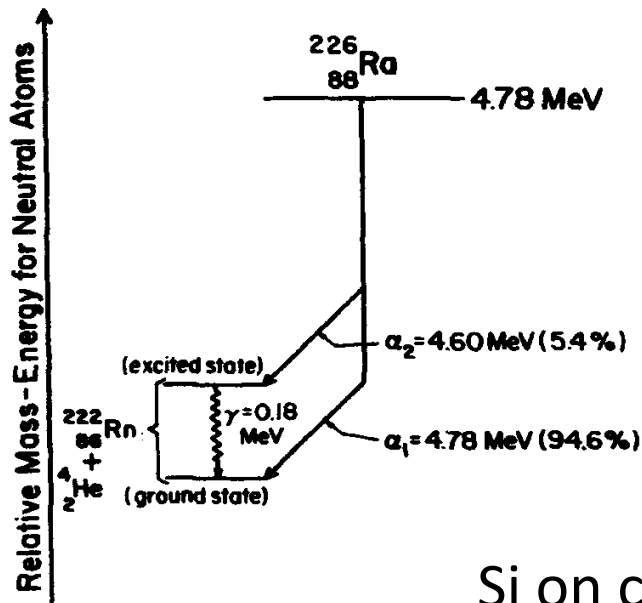
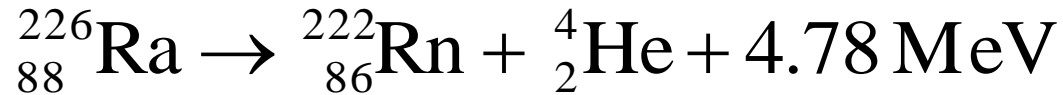
- Donc  $\rightarrow$  si  $x\%$  des  $\gamma$  émis en  $dv$  s'échappent de  $V \rightarrow$  réduction de  $x\%$  de  $D$  en  $P$  par rapport à la dose en RE  $\rightarrow AF_{dv,V} = 1-x\%$
- Avec  $\bar{\mu}'$  le coefficient d'atténuation effectif moyen pour une fluence énergétique de  $\gamma$  le long de la distance  $r$  dans le milieu  $\rightarrow$  la fraction de  $\gamma$  qui s'échappent suivant la direction de  $r$  est  $\exp(-\bar{\mu}'r)$

$$AF_{dv,V} = \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} (1 - e^{-\bar{\mu}'r}) \sin \theta d\theta d\phi$$

- Si on considère la straight-ahead approximation  $\rightarrow \mu_{en} \simeq \bar{\mu}'$  et

$$\bar{r} = \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r \sin \theta d\theta d\phi \quad \longrightarrow \quad AF_{dv,V} \simeq 1 - e^{-\mu_{en}\bar{r}}$$

# Désintégration $\alpha + \gamma$



$$E_{\alpha} = 0.946 \times 4.78 + 0.054 \times 4.60 = 4.77 \text{ MeV}$$

Si on considère  $n$  désintégrations /g

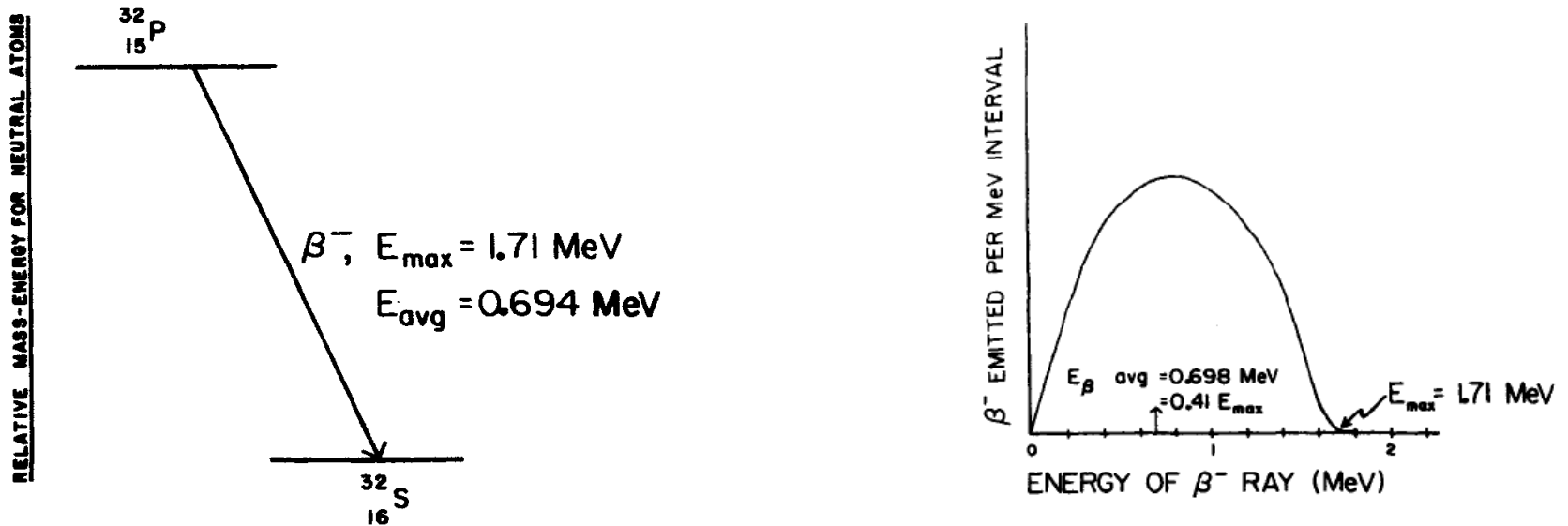
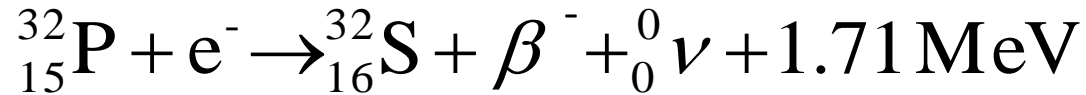


CPE:  $4.77 n \text{ MeV/g}$



RE:  $4.78 n \text{ MeV/g}$

# Désintégration $\beta$



$$E_{\beta} = E_{\text{avg}} = 0.694\text{ MeV} \approx 1/3 E_{\text{max}}$$

Si on considère  $n$  désintégrations /g



CPE:  $0.694 n\text{ MeV/g}$

# Application: dose absorbée dans un film mince pour des particules chargées

- Pour un faisceau de particules chargées d'énergie  $E_{in}$  et de fluence  $\Phi$  incidents  $\perp$  sur un matériau de nombre atomique  $Z$ , de masse volumique  $\rho$ , suffisamment mince (épaisseur  $l$ ) pour que
  1.  $S_{elec} \approx$  constant et dépend de  $E_{in}$
  2. Toutes les particules traversent le film en ligne droite  $\rightarrow$  le scattering est négligeable
  3. L' $E$  cinétique emportées en dehors du film par les  $e^-$   $\delta$  est négligeable (le film est suffisamment large comparé au ranges des  $e^-$   $\delta$  ou le film est « tenu en sandwich » entre deux films de même  $Z \rightarrow$  CPE)
- La rétrodiffusion des particules est négligée
  - Pour les ions  $\rightarrow$  légitime
  - Pour des  $e^-$   $\rightarrow$  même nombre de rétrodiffusés à l'avant et à l'arrière du film  $\rightarrow$  équilibre

# Dose dans un film mince pour des particules chargées

- Pour des ions (lourds) → les 3 suppositions sont raisonnables
- Pour des  $e^-$  (légers) → la supposition 2. est la plus faible → nécessite parfois des corrections
- L' $E$  perdue  $\Delta E$  est donnée par (en MeV/m<sup>2</sup>) →

$$\Delta E = \Phi \left( \frac{dE}{\rho dx} \right)_{elec} \rho l$$

avec  $(dE/\rho dx)_{elec}$ , le pouvoir d'arrêt massique électronique du matériau évalué en  $E_{in}$

- Avec la supposition 3. → l' $E$  perdue dans le film est l' $E$  impartie →

$$D = \frac{\Delta E}{\rho l} = \Phi \left( \frac{dE}{\rho dx} \right)_{elec}$$



## Commentaires sur ce résultat

- $D$  indépendant de  $l \rightarrow$  incliner le film ne change rien
- Si la supposition 3. n'est plus satisfaite (film trop mince isolé)  
 $\rightarrow$  les  $e^- \delta$  s'échappent et emportent leur  $E \rightarrow$  la formule pour  $D$  devient  $\rightarrow$

$$D = \Phi \left( \frac{dE}{\rho dx} \right)_{\Delta}$$

- Avec  $\Delta$  choisie pour représenter l' $E$  qui s'échappe
- Très difficile d'avoir un film *vraiment* isolé

## Dose dans une cible épaisse pour des ions lourds

- Utilisation des tables de parcours CSDA  $\rightarrow$  en connaissant  $E_{in}$  et l'épaisseur du matériau  $l \rightarrow$  on trouve  $E_{exit} \rightarrow$

$$\Delta T = E_{in} - E_{exit}$$

- L'énergie impartie (en MeV/m<sup>2</sup>)  $\rightarrow$

$$\Delta E = \Phi \Delta T$$

- La dose vaut  $\rightarrow$

$$D = \frac{\Delta E}{\rho l} = \frac{\Phi \Delta T}{\rho l}$$

## Dose dans une cible épaisse pour des électrons

- On suppose une cible  $>$  parcours maximal projeté des  $e^-$
- Complication due au Bremsstrahlung  $\rightarrow$  définition du champ de radiation  $Y(E_{in})$  pour un  $e^-$  d'énergie cinétique  $E_{in}$  : fraction de  $E_{in}$  qui est perdue lors des collisions radiatives le long du parcours de  $e^- \rightarrow$

$$\Delta E = \Phi E_{in} [1 - Y(E_{in})]$$

- La dose vaut  $\rightarrow$

$$D = \frac{\Delta E}{\rho l} = \frac{\Phi E_{in} [1 - Y(E_{in})]}{\rho l}$$