Analyse Numérique
Travaux Pratiques 2024 – 2025
Séance 11

1. Le Tellurium-135, un des produits de fission de l'Uranium-235, suit la chaine de désintégration

$$^{135}\,\mathrm{Te} \xrightarrow{19s} {}^{135}\,\mathrm{I} \xrightarrow{6.7h} {}^{135}\,\mathrm{Xe} \xrightarrow{9.2h} {}^{135}\,\mathrm{Cs}\,.$$

Le nombre de moles $N_X(t)$ de l'élément X en fonction du temps est décrit par le problème de Cauchy

$$\begin{cases} \frac{dN_{\mathrm{Te}}}{dt}(t) &= -\lambda_{\mathrm{Te}} N_{\mathrm{Te}}\,, \\ \frac{dN_{\mathrm{I}}}{dt}(t) &= -\lambda_{\mathrm{I}} N_{\mathrm{I}} + \lambda_{\mathrm{Te}} N_{\mathrm{Te}}\,, \\ \frac{dN_{\mathrm{Xe}}}{dt}(t) &= -\lambda_{\mathrm{Xe}} N_{\mathrm{Xe}} + \lambda_{\mathrm{I}} N_{\mathrm{I}}\,, \end{cases}$$

avec $\lambda_{\mathrm{Te}} = \ln(2)/19\,,\ \lambda_{\mathrm{I}} = \ln(2)/(6.7 \cdot 3600)$ et $\lambda_{\mathrm{Xe}} = \ln(2)/(9.2 \cdot 3600)$ étant les constantes radioactives des isotopes concernés. On considère qu'à l'instant initial seule 1 mole de Tellurium-135 est disponible.

a) Mettez le problème sous la forme vectorielle

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{y}}{dt} &= -A\mathbf{y}\,, \\ \mathbf{y}(0) &= \mathbf{y}_0\,, \end{cases}$$

avec $\mathbf{y}$ un vecteur de dimension 3 et A une matrice de dimensions 3×3.

b) Déterminez les valeurs propres de la matrice A. Vérifiez que la solution exacte du problème est bornée. Exprimez la condition de stabilité pour les méthodes d'Euler progressive et d'Euler rétrograde.

c) Vérifiez expérimentalement les conditions de stabilité en appliquant les méthodes d'Euler progressive et d'Euler rétrograde à ce système.

d) La valeur maximale de N_{Xe} et le temps pour lequel elle est atteinte sont assez bien approchés [1] par

$$N_{\mathrm{Xe}}(t_{\max}) \approx \frac{\lambda_{\mathrm{I}}}{\lambda_{\mathrm{I}} - \lambda_{\mathrm{Xe}}}(e^{-\lambda_{\mathrm{Xe}} t_{\max}} - e^{-\lambda_{\mathrm{I}} t_{\max}}) \approx 0.4275\,, \qquad t_{\max} \approx \frac{\ln(\lambda_{\mathrm{I}}) - \ln(\lambda_{\mathrm{Xe}})}{\lambda_{\mathrm{I}} - \lambda_{\mathrm{Xe}}} \approx 40606\,.$$

Déterminez expérimentalement le pas d'intégration h maximal pour lequel la méthode d'Euler progressive permet de retrouver ces valeurs à 5% près. Faites la même chose pour Euler rétrograde. Lequel des deux pas est le plus favorable ?

2. Le système d'équations différentielles de Lotka-Volterra décrit l'évolution de deux populations – proies et de prédateurs – en tenant compte de la prédation. Un cas particulier d'un tel système est donné par

$$\begin{cases} \frac{dV}{dt}(t) &= V - 0.5\,V\,P\,, \\ \frac{dP}{dt}(t) &= 0.1\,V\,P - P\,, \end{cases}$$

où les variables P et V représentent la densité de population de prédateurs et proies, respectivement. Utilisez les fonctions d'Euler progressive et rétrograde de l'exercice précédent pour résoudre ce problème sur l'intervalle $[0, 20]$ compte tenu des conditions initiales $V(0) = P(0) = 1$. Comparez les deux solutions pour choisir un pas de discrétisation raisonnable.

1. Ces formules sont obtenues en supposant que Tellurium-135 se désintègre instantanément.