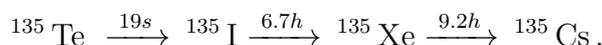


ANALYSE NUMÉRIQUE

Travaux Pratiques 2024 – 2025

Séance 11

1. Le Tellurium-135, un des produits de fission de l'Uranium-235, suit la chaîne de désintégration



Le nombre de moles $N_X(t)$ de l'élément X en fonction du temps est décrit par le problème de Cauchy

$$\begin{cases} \frac{dN_{\text{Te}}}{dt}(t) &= -\lambda_{\text{Te}}N_{\text{Te}}, \\ \frac{dN_{\text{I}}}{dt}(t) &= -\lambda_{\text{I}}N_{\text{I}} + \lambda_{\text{Te}}N_{\text{Te}}, \\ \frac{dN_{\text{Xe}}}{dt}(t) &= -\lambda_{\text{Xe}}N_{\text{Xe}} + \lambda_{\text{I}}N_{\text{I}}, \end{cases}$$

avec $\lambda_{\text{Te}} = \ln(2)/19$, $\lambda_{\text{I}} = \ln(2)/(6.7 \cdot 3600)$ et $\lambda_{\text{Xe}} = \ln(2)/(9.2 \cdot 3600)$ étant les constantes radioactives des isotopes concernés. On considère qu'à l'instant initial seule 1 mole de Tellurium-135 est disponible.

a) Mettez le problème sous la forme vectorielle

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{y}}{dt} = -A\mathbf{y}, \\ \mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0, \end{cases}$$

avec \mathbf{y} un vecteur de dimension 3 et A une matrice de dimensions 3×3 .

- b) Déterminez les valeurs propres de la matrice A . Vérifiez que la solution exacte du problème est bornée. Exprimez la condition de stabilité pour les méthodes d'Euler progressive et d'Euler rétrograde.
- c) Vérifiez expérimentalement les conditions de stabilité en appliquant les méthodes d'Euler progressive et d'Euler rétrograde à ce système.
- d) La valeur maximale de N_{Xe} et le temps pour lequel elle est atteinte sont assez bien approchés¹ par

$$N_{\text{Xe}}(t_{\max}) \approx \frac{\lambda_{\text{I}}}{\lambda_{\text{I}} - \lambda_{\text{Xe}}} (e^{-\lambda_{\text{Xe}}t_{\max}} - e^{-\lambda_{\text{I}}t_{\max}}) \approx 0.4275, \quad t_{\max} \approx \frac{\ln(\lambda_{\text{I}}) - \ln(\lambda_{\text{Xe}})}{\lambda_{\text{I}} - \lambda_{\text{Xe}}} \approx 40606.$$

Déterminez expérimentalement le pas d'intégration h maximal pour lequel la méthode d'Euler progressive permet de retrouver ces valeurs à 5% près. Faites la même chose pour Euler rétrograde. Lequel des deux pas est le plus favorable?

2. Le système d'équations différentielles de Lotka-Volterra décrit l'évolution de deux populations – proies et de prédateurs – en tenant compte de la prédation. Un cas particulier d'un tel système est donné par

$$\begin{cases} \frac{dV}{dt}(t) &= V - 0.5VP, \\ \frac{dP}{dt}(t) &= 0.1VP - P, \end{cases}$$

où les variables P et V représentent la densité de population de prédateurs et proies, respectivement. Utilisez les fonctions d'Euler progressive et rétrograde de l'exercice précédent pour résoudre ce problème sur l'intervalle $[0, 20]$ compte tenu des conditions initiales $V(0) = P(0) = 1$. Comparez les deux solutions pour choisir un pas de discrétisation raisonnable.

1. Ces formules sont obtenues en supposant que Tellurium-135 se désintègre instantanément.