Analyse Numérique
Corrigés des Travaux Pratiques 2023 – 2024
Séance facultative

Notons avant de commencer que cette séance a pour but d'**illustrer** le chapitre sur les problèmes aux limites. Elle ne fait formellement pas partie de la matière.

1. En ce qui concerne l'existence et l'unicité, on notera que le Théorème 1 du chapitre correspondant s'applique à tous les problèmes considérés, et donc garantit l'existence et l'unicité de la solution exacte pour tous ces problèmes.

De manière générale, la résolution numérique des problèmes aux limites revient à résoudre un système linéaire

$$A\mathbf{y} = \mathbf{b}\,,$$

où la composante y_i du vecteur de la solution $\mathbf{y}$ correspond à une approximation de la solution exacte en un point donné x_i du maillage ; le maillage est supposé **uniforme** de pas h, et donc $x_i = ih$. La dérivation des équations du système diffère selon qu'on considère un point à l'*intérieur* du maillage ou à la *frontière* de celui-ci.

Pour ce qui est des points intérieurs, ils sont toujours entourés d'autres points du maillage des deux cotés. Plus précisément, un point intérieur x_i est toujours entouré des points x_{i-1} et x_{i+1}. Dès lors, l'équation différentielle

$$-\frac{d^2y}{dx^2} + p(x)\frac{dy}{dx} + q(x)y \;=\; f(x)$$

peut être approchée en x_i par

$$-\frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2} + p(x_i)\left\{\begin{array}{ll} (y_{i+1} - y_i)/h & \text{si } p(x_i) < 0 \\ (y_i - y_{i-1})/h & \text{si } p(x_i) > 0 \end{array}\right\} + q(x_i)y_i \;=\; f(x_i)\,,$$

où y_{i-1}, y_i et y_{i+1} sont les approximations de la solution aux points x_{i-1}, x_i et x_{i+1}. Dans cette dernière équation, le terme entre accolades correspond au schéma upwind.

Pour ce qui est des point à la frontière, on distingue deux cas de figure : les conditions de Dirichlet et celles de Neumann. Une condition de Dirichlet est de la forme

$$y(x_i) \;=\; c_{x_i}\,,$$

où c_{x_i} est la valeur de la condition imposée et x_i un point à la frontière (c'est-à-dire le premier ou le dernier point du maillage). Elle est imposée via l'équation

$$y_i \;=\; c_{x_i}\,,$$

soit en rajoutant cette dernière au système considéré, soit en substituant partout la valeur de l'inconnue y_i par c_{x_i} (cette dernière option est préférable ; elle est utilisé plus bas).

Pour ce qui est de la condition de Neumann

$$\frac{dy}{dx}(x_i) \;=\; c_{x_i}\,,$$

dans le cas où $p = q = 0$ elle revient à (cf. notes de cours)

$$\frac{y_1 - y_0}{h} \;=\; c_{x_0} - \frac{h}{2}f(x_0)$$

s'il s'agit du premier point du maillage (point x_0), ou à

$$\frac{y_m - y_{m-1}}{h} \;=\; c_{x_m} + \frac{h}{2}f(x_m)$$

s'il s'agit du dernier point (point x_m). Notez le changement de signe pour le second terme à droite de l'égalité ; pouvez-vous l'expliquer ?

a) Pour un maillage à $m+1$ points sur l'intervalle $[0,1]$ (et donc avec $h = 1/m$) on a, en multipliant certaines équations par h ou h^2 pour simplifier l'écriture,

premier point (i=0) : $y_0 = 1$, (Dirichlet : $y(0) = 1$)
points intérieurs : $-y_{i-1} + 2y_i - y_{i+1} = h^2 \sin(x_i^2)$,
dernier point (i=m) : $y_m - y_{m-1} = 2h + \frac{h^2}{2}\sin(1)$. (Neumann : $\frac{dy}{dx}(1) = 2$)

En éliminant l'équation du premier point cela donne le système $m \times m$ suivant :

$$\left\{\begin{array}{lllll} 2y_1 & -y_2 & & & = h^2 \sin(x_1^2) + \overbrace{y_0}^{=1} \\ -y_1 & +2y_2 & -y_3 & & = h^2 \sin(x_2^2) \\ & -y_2 & +2y_3 & -y_4 & = h^2 \sin(x_3^2) \\ & & & & \dots \\ & & -y_{m-1} & +y_m & = 2h + \frac{h^2}{2}\sin(1) \end{array}\right.$$

La fonction qui effectue la résolution est comme suit :

```
function y = pcl1(np)
% Y = pcl1(NP)
%    Calcule la solution approchée Y du problème aux limites
%
%       -d^2Y/(dx)^2 = sin(x^2)
%       Y(0) = 1, dY/dx(1) = 2,
%
%    aux NP (NP>1) points équidistants de l'intervalle [0,1].
%
% argument:
%    NP - nombre de points où la solution est calculée
% sortie:
%    Y - solution approchée du problème aux limites
if(np <= 1)
    error(' NP doit être > 1');
else
    m = np-1; h = 1/m; h2 = h*h;
    A = zeros(m,m);
    A(1,1) = 2; A(1,2) = -1; b(1) = h2*sin(h2)+1; % deuxième point
    for i = 2:m-1
       xi = i*h;
       A(i,i) = 2; A(i,i-1) = -1;
       A(i,i+1) = -1; b(i) = h2*sin( xi^2 ); % points intérieurs
    end
    A(m,m) = 1; A(m,m-1) = -1; b(m) = 2*h+h2/2*sin(1); % dernier pt

    y = A \ (b'); % b est vect. linge, il faut vect. colonne
    y= [1; y];     % n'oubliez pas le premier point
end
```

L'affichage de la solution peut alors être effectué avec l'instruction

```
np = 100; y = pcl1(np); x = 0:1/(np-1):1;
plot(x,y,'-*')
```

b) Pour un maillage à $m+1$ points sur l'intervalle $[0,2]$ (et donc avec $h = 2/m$) on a, en multipliant certaines équations par h ou h^2 pour simplifier l'écriture,

premier point (i=0) : $y_0 = 0\,,$ (Dirichlet : $y(0) = 0$)

points intérieurs : $-y_{i-1} + (2+10h^2)y_i - y_{i+1} = h^2\,x_i^2\,,$

dernier point (i=m) : $y_m = 0\,.$ (Dirichlet : $y(2) = 0$)

En éliminant les équations du premier et du dernier point cela donne le système $(m-1)\times(m-1)$ suivant :

$$\left\{\begin{array}{cccccl}
(2+10h^2)y_1 & -y_2 & & & = & h^2\,x_1^2 + \overbrace{y_0}^{=0} \\
-y_1 & +(2+10h^2)y_2 & -y_3 & & = & h^2\,x_2^2 \\
 & -y_2 & +(2+10h^2)y_3 & -y_4 & = & h^2\,x_3^2 \\
 & & & & \cdots & \\
 & & -y_{m-2} & +(2+10h^2)y_{m-1} & = & h^2\,x_{m-1}^2 + \underbrace{y_m}_{=0}
\end{array}\right.$$

La fonction qui effectue la résolution est comme suit :

```
function y = pcl2(np)
% Y = pcl2(NP)
%    Calcule la solution approchée Y du problème aux limites
%
%       -d^2Y/(dx)^2+10Y = x^2
%       Y(0) = 0, Y(2) = 0,
%
%    aux NP (NP>1) points équidistants de l'intervalle [0,2].
%
% argument:
%    NP - nombre de points où la solution est calculée
% sortie:
%    Y - solution approchée du problème aux limites
if(np <= 1)
    error(' NP doit être > 1');
else
    m = np-1; h = 2/m; h2 = h*h;
    A = zeros(m-1,m-1);
    A(1,1) = 2+10*h2; A(1,2) = -1; b(1) = h2*h2; % deuxième point
    for i = 2:m-2
       xi = i*h;
       A(i,i) = 2+10*h2; A(i,i-1) = -1;
       A(i,i+1) = -1; b(i) = h2 * xi^2; % points intérieurs
    end
    A(m-1,m-1) = 2+10*h2; A(m-1,m-2) = -1;
    xi = (m-1)*h; b(m-1) = h2 * xi^2; % avant-dernier point

    y = A \ (b'); % b est vect. linge, il faut vect. colonne
    y= [0; y; 0]; % n'oubliez pas le premier et le dernier point
end
```

L'affichage de la solution peut alors être effectué avec l'instruction

```
np = 100; y = pcl2(np); x = 0:2/(np-1):2;
plot(x,y,'-*')
```

c) Pour un maillage à $m+1$ points sur l'intervalle $[0,1]$ (et donc avec $h=1/m$) on a, en multipliant certaines équations par h ou h^2 pour simplifier l'écriture, et en notant que $p(x)=20>0$,

premier point (i=0) : $y_0 = 0$, (Dirichlet : $y(0)=0$)

points intérieurs : $-(1+20h)y_{i-1}+(2+20h)y_i-y_{i+1} = 0$,

dernier point (i=m) : $y_m = 1$. (Dirichlet : $y(1)=1$)

En éliminant les équations du premier et du dernier point cela donne le système $(m-1)\times(m-1)$ suivant :

$$\left\{\begin{array}{ccccccl}
(2+20h)y_1 & -y_2 & & & & = & (1+20h)\overbrace{y_0}^{=0} \\
-(1+20h)y_1 & +(2+20h)y_2 & -y_3 & & & = & 0 \\
 & -(1+20h)y_2 & +(2+20h)y_3 & & -y_4 & = & 0 \\
 & & & & & \cdots & \\
 & & & -(1+20h)y_{m-2} & +(2+20h)y_{m-1} & = & \underbrace{y_m}_{=1}
\end{array}\right.$$

La fonction qui effectue la résolution est comme suit :

```
function y = pcl3(np)
% Y = pcl3(NP)
%    Calcule la solution approchée Y du problème aux limites
%
%       -d^2Y/(dx)^2 + 20 dY/dx = 0
%       Y(0) = 0, Y(1) = 1,
%
%    aux NP (NP>1) points équidistants de l'intervalle [0,1].
%
% argument:
%    NP - nombre de points où la solution est calculée
% sortie:
%    Y - solution approchée du problème aux limites
if(np <= 1)
    error(' NP doit être > 1');
else
    m = np-1; h = 1/m; h2 = h*h;
    A = zeros(m-1,m-1);
    A(1,1) = 2+20*h; A(1,2) = -1; b(1) = 0; % deuxième point
    for i = 2:m-2
       xi = i*h;
       A(i,i) = 2+20*h; A(i,i-1) = -1-20*h;
       A(i,i+1) = -1; b(i) = 0; % points intérieurs
    end
    A(m-1,m-1) = 2+20*h; A(m-1,m-2) = -1-20*h;
    b(m-1) = 1; % avant-dernier point

    y = A \ (b'); % b est vect. linge, il faut vect. colonne
    y= [0; y; 1]; % n'oubliez pas le premier et le dernier point
end
```

L'affichage de la solution peut alors être effectué avec l'instruction

```
np = 100; y = pcl3(np); x = 0:1/(np-1):1;
plot(x,y,'-*')
```

2. Le code suivant effectue la tache requise.

```
clear all;
y = @(x) (exp(20.*x)-1)/(exp(20)-1); % sol exacte (cf. notes de
   cours)
%
h = 1/4;
plot(0:h:1, pcl3(5),'-*');
hold on
%
h = 1/8;
plot(0:h:1, pcl3(9),'-*c');
%
h = 1/16;
plot(0:h:1, pcl3(17),'-*m');
%
h = 1/100; x = 0:h:1;
plot(x,y(x),'-*r');
hold off
```