# Analyse Numérique

# Corrigés des Travaux Pratiques 2024 – 2025
# Séance 6

1. Une manière d'écrire la fonction pour la méthode de Jacobi est comme suit. Notons que la fonction possède deux entrées supplémentaires : le nombre d'itérations maximal `maxit` et le vecteur initial `xo` qu'on pourrait aussi bien définir à l'intérieur de la fonction.

```
function [x iter rr] = jac_3diag(A,b,tol,maxit,xo)
% X = jac_3diag(A,B,TOL,MAXIT,XO)
%    applique la methode de Jacobi à un système
%    tridiagonal AX=B avec XO comme approximation initiale
%    de la solution; utilise comme critère d'arrêt le résidu
%    relatif en norme euclidienne inférieur à TOL ou le
%    dépassement du nombre maximal MAXIT d'itérations; mis à
%    part la solution approchée X la fonction retourne le
%    nombre d'itérations ITER et le résidu relatif RR
%    correspondant à X.
    n = length(b);
    x = zeros(n,1); % pour donner la forme d'un vecteur colonne
    for iter = 1:maxit
           % calcul de x
        x(1) = (b(1) - A(1,2)*xo(2)) / A(1,1);
        for i = 2:n-1
          x(i) = (b(i)-A(i,i+1)*xo(i+1)-A(i,i-1)*xo(i-1))/A(i,i);
        end
        x(n) = (b(n) - A(n,n-1)*xo(n-1)) / A(n,n);
        xo = x;
           % calcul du residu
        r = b - A*x;
           % ou pour ne tenir compte que des 3 diagonales
           % r = b - diag(A).*x - diag(A,1).*x(2:end) ...
           %      - diag(A,-1).*x(1:end-1);
        rr = norm(r)/norm(b);
        if (rr <= tol)
            break
        end
    end
```

La résolution du système se fait alors comme suit

```
[x itr rr] = jac_3diag(A,d,1e-3,1000,zeros(length(d),1));
```

2. Une manière d'écrire la fonction pour la méthode de Gauss-Seidel :

```
function [x iter rr] = gs_3diag(A,b,tol,maxit,xo)
% X = gs_3diag(A,B,TOL,MAXIT,XO)
%    applique la methode de Gauss-Seidel à un système
%    tridiagonal AX=B avec XO comme approximation initiale
%    de la solution; utilise comme critère d'arrêt le résidu
```

```
%     relatif en norme euclidienne inférieur à TOL ou le
%     dépassement du nombre maximal MAXIT d'itérations; mis à
%     part la solution approchée X la fonction retourne le
%     nombre d'itérations ITER et le résidu relatif RR
%     correspondant à X.
    n = length(b);
    x = xo;
    for iter = 1:maxit
           % calcul de x
        x(1) = (b(1) - A(1,2)*x(2)) / A(1,1);
        for i = 2:n-1
            x(i) = (b(i)-A(i,i+1)*x(i+1)-A(i,i-1)*x(i-1))/A(i,i);
        end
        x(n) = (b(n) - A(n,n-1)*x(n-1)) / A(n,n);
           % calcul du residu
        r = b - A*x;
           % ou pour ne tenir compte que des 3 diagonales
           % r = b - diag(A).*x - diag(A,1).*x(2:end) ...
           %     - diag(A,-1).*x(1:end-1);
        rr = norm(r)/norm(b);
        if (rr <= tol)
            break
        end
    end
```

La résolution du système se fait alors comme suit

```
[x itr rr] = gs_3diag(A,d,1e-3,1000,zeros(length(d),1));
```

3. La matrice du système (qui ne dépend que des abscisses $x(i)$ des points d'interpolation) est donnée par

$$A \;=\; \begin{pmatrix} 2 & 0.5 & & & & \\ 0.5 & 2 & 0.5 & & & \\ & 0.5 & 2 & 0.5 & & \\ & & 0.5 & 2 & 0.5 & \\ & & & 0.5 & 2 & 0.5 \\ & & & & 0.5 & 2 \end{pmatrix},$$

et est donc de la forme

$$A \;=\; \begin{pmatrix} d_1+c & c & & & \\ c & d_2+2c & c & & \\ & c & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & d_{n-1}+2c & c \\ & & & c & d_n+c \end{pmatrix}$$

avec $c = 0.5$, $d_1 = d_5 = 1.5$ et $d_2 = d_3 = d_4 = 1$. On peut donc utiliser l'inégalité (1) de l'énoncé avec $\max_I d_i = 1.5$ et $\min_i d_i = 1$, ce qui donne

$$\kappa(A) \;\le\; 3.5\,.$$

Cela implique (en utilisant les inégalités qui relient la norme du résidu à celle de l'erreur, voir le slide "Contrôle de convergence" du Chapitre 4)

$$\frac{1}{3.5}\frac{\|\mathbf{r}\|}{\|\mathbf{b}\|} \;\leq\; \frac{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_{\text{approx}}\|}{\|\mathbf{x}\|} \;\leq\; 3.5\frac{\|\mathbf{r}\|}{\|\mathbf{b}\|}$$

et, avec le critère d'arrêt choisi, on a

$$\frac{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_{\text{approx}}\|}{\|\mathbf{x}\|} \;\leq\; 3.5\ 10^{-3}\,.$$

4. La relation du point 6.a) se vérifie par substitution ; la double inégalité (2) dans l'énoncé vient du fait que

$$(\min_i d_i)\sum_{i=1}^{n} v_i^2 \;\leq\; \sum_{i=1}^{n} d_i v_i^2 \;\leq\; (\max_i d_i)\sum_{i=1}^{n} v_i^2$$

ainsi que

$$0 \;\leq\; \sum_{i=1}^{n-1}(v_i+v_{i+1})^2 \;\leq\; 2\sum_{i=1}^{n-1}(v_i^2+v_{i+1}^2) \;\leq\; 4\sum_{i=1}^{n} v_i^2\,.$$

Finalement, les inégalités (2) dans l'énoncé impliquent (pour une matrice avec les valeurs propres positives, et donc pour une matrice symétrique définie positive) que

$$\begin{aligned} \min_i d_i \;&\leq\; \lambda_{\min}(A) \;=\; 1/\lambda_{\max}(A^{-1}) \;=\; 1/\|A^{-1}\|_2\,,\\ 4c+\max_i d_i \;&\geq\; \lambda_{\max}(A) \;=\; \|A\|_2\,. \end{aligned}$$