Analyse Numérique

Corrigés des Travaux Pratiques 2024 – 2025
Séance 5

Les résultats numériques présentés dans ce corrigé peuvent différer légèrement d'une machine à l'autre, surtout s'il s'agit d'évaluer la précision d'une méthode (comme pour l'exercice 3) ; néanmoins, l'ordre de grandeur doit rester le même. Ce commentaire reste bien entendu d'application pour les séances passées et à venir.

1. La méthode des équations normales (version LU) revient à

```
AtA = (A'*A);
Atb = A'*b;
[L U P] = lu(AtA);
x = U\(L\(P*Atb));
```

Pour ce qui est de la méthode QR, elle revient à utiliser

```
[Q,R] = qr(A,0);
x = R\(Q'*b);
```

2. Le conditionnement de la matrice A s'obtient à l'aide de l'instruction `cond(A)`, ou encore `norm(inv(A'*A)*A')*norm(A)`, ou encore `norm(pinv(A))*norm(A)` avec `pinv(A)` étant le pseudo-inverse $A^\dagger$ de A. Dans tous les cas

$$\kappa(A) \;\approx\; 8.83\ 10^5 \,.$$

Le conditionnement d'un système surdéterminé

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

(avec la solution $\mathbf{x}$ déterminée au sens des moindres carrés) est :

$$\begin{aligned}
\kappa_{MC,A} &\leq \kappa(A) + \frac{\kappa(A)^2\|\mathbf{r}\|_2}{\|A\|_2\|\mathbf{x}\|_2} \\
\kappa_{MC,\mathbf{b}} &\leq \kappa(A)/\cos(\theta)
\end{aligned}$$

où $\mathbf{r} = \mathbf{b} - A\mathbf{x}$ est le résidu et $\sin(\theta) \;=\; \|\mathbf{r}\|/\|\mathbf{b}\|$. Pour estimer le conditionnement on doit donc connaître $\mathbf{r}$, et donc aussi la solution $\mathbf{x}$; en pratique le conditionnement du problème est donc vérifié à posteriori.

Pour les deux systèmes on obtient les valeurs suivantes :

	$\cos(\theta)$	$\frac{\|\mathbf{r}\|_2}{\|A\|_2\|\mathbf{x}\|_2}$	borne pour $\kappa_{MC,A}$	borne pour $\kappa_{MC,\mathbf{b}}$
$A\mathbf{x}_1 = \mathbf{b}_1$	1	$5.2\ 10^{-16}$	$8.83\ 10^5$	$8.83\ 10^5$
$A\mathbf{x}_2 = \mathbf{b}_2$	0.04	$3.0\ 10^{-5}$	$2.4\ 10^7$	$2.2\ 10^7$

et donc la précision relative obtenue avec une méthode qui a la stabilité directe (approximativement, il s'agit surtout d'un ordre de grandeur !) est de $8.83\ 10^5 u \;\approx$

$1.0\ 10^{-10}$ pour le premier système et $2.4\ 10^7 u \approx 2.7\ 10^{-9}$ pour le second, ou u est l'unité d'arrondi.

3. La vérification peut se faire en calculant `A'*A*x` et `A'*b` et pour `x=[1;-1;1;-1]` en vérifiant que les deux vecteurs sont égaux ; notez que l'ensemble des opérations n'impliquent que des nombres entiers qui ne dépassent pas 10^{15} et donc aucun arrondi n'a lieu. L'erreur relative (en norme 2)

$$\frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_{exact}\|_2}{\|\mathbf{x}_{exact}\|_2}$$

dans le cas du premier système est de $6.0\ 10^{-7}$ pour la méthode des équations normales et de $8.5\ 10^{-12}$ pour la méthode de la factorisation QR.

On observe en particulier que l'erreur relative pour la méthode des équations normales est environ 10^3-10^4 fois plus grande que celle produite par une méthode stable ; la méthode ne semble donc pas avoir la stabilité directe (on le savait déjà !). Pour ce qui est de la méthode de la factorisation QR, sa précision est conforme au fait qu'elle possède la stabilité inverse (et donc aussi la stabilité directe).