

ANALYSE NUMÉRIQUE

Corrigés des Travaux Pratiques 2024 – 2025

Séance 12

1.a) Puisque au plus une des deux conditions est de type Neumann, Théorème 1 utilisé avec $p(x) = 0$ et $q(x) = 1 > 0$ indique que la solution du problème aux limites existe et est unique.

b) La version discrète de l'équation différentielle

$$-\frac{d^2 y}{dx^2} + y = f(x)$$

aux $m - 1$ points $x_k = k/m$, $k = 1, \dots, m - 1$, est

$$-\frac{y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}}{h^2} + y_k = f(x_k),$$

où $h = 1/m$. En multipliant par h^2 et en regroupant les termes on obtient

$$-y_{k+1} + (2 + h^2)y_k - y_{k-1} = h^2 f(x_k). \quad (1)$$

c) Comme le problème aux limites ne correspond plus au problème de Poisson (il a un terme en y en plus), l'équation (5) du Chapitre 9 n'est à priori pas applicable. En répétant le raisonnement du cours on obtient (avec la différence par rapport au cours marquée en rouge)

$$(h/2) \cdot (f(0) - y_0) = -(h/2) \cdot \frac{d^2 y}{dx^2}(0) = - \underbrace{\frac{dy}{dx}(h/2)}_{(y_1 - y_0)/h + \mathcal{O}(h^2)} + \underbrace{\frac{dy}{dx}(0)}_0 + \mathcal{O}(h^2).$$

Notons que le terme $\mathcal{O}(h^2)$ n'est utile que pour indiquer l'ordre de l'erreur commise. Finalement, en multipliant les deux cotés par h et en réarrangeant les termes, l'équation peut être mise sous une forme similaire à l'équation (1)

$$y_0(1 + h^2/2) - y_1 = (h^2/2)f(0).$$

Bien entendu, chaque équation peut être multipliée par un facteur non nul sans changer la solution du système. La normalisation dans notre cas est motivée par la symétrie de la matrice du système résultant (cf., par exemple, le point suivant).

d) Dans le cas $m = 3$ (et donc $h = 1/3$) le système d'équations linéaires résultant est

$$\begin{cases} 19/18 y_0 & -y_1 & & = (h^2/2) \cdot f(0) \\ & -y_0 & +19/9 y_1 & -y_2 = h^2 \cdot f(1/3) \\ & & -y_1 & +19/9 y_2 = h^2 \cdot f(2/3). \end{cases}$$

e) Une possible manière de faire est comme suit :

```
function y = pcl_nd(f,np)
% Y = pcl_nd(F,NP)
%   Calcule la solution approchée Y du problème aux limites
%
%   -d^2Y/(dx)^2 + Y = F
%   dY/dx(0) = 0, Y(1) = 0
```

```

%
%    aux NP (NP>1) points équidistants de l'intervalle [0,1].
%
% arguments:
%    F - la fonction d'une variable qui détermine le membre
%        de droite de l'équation
%    NP - nombre de points où la solution est calculée
%
% sortie:
%    Y - solution approchée du problème aux limites
h = 1/(np-1); h2 = h*h;
if(np <= 1)
    error(' NP doit être > 1 ');
else
    A = diag ( (2+h2)*ones(np-1,1), 0) ...
        + diag (-ones(np-2,1), 1) ...
        + diag (-ones(np-2,1), -1);
    A(1,1) = (1+h2/2);
    for i = 1:np-1
        b(i) = h2 * f((i-1)*h);
    end
    b(1) = (h2/2)*f(0);
    y = A \ (b');
    y= [y; 0];
end

```

Notons que l'utilisation de l'instruction `spdiags` permet d'avoir une matrice creuse (`sp` provient de *sparse*, creux en anglais).

f) Une manière de procéder est de choisir la solution $y(x) \in C^2$ qui satisfait les conditions aux limites et de l'injecter dans l'équation pour obtenir une fonction $f(x)$. Un candidat possible a été présenté au cours : $y(x) = \sin^2(\pi(x+1)/2)$. La fonction $f(x)$ correspondante est alors

$$f(x) = -\frac{d^2y}{dx^2}(x) + y(x) = -\pi^2/2 \cdot \cos(\pi(x+1)) + \sin^2(\pi(x+1)/2).$$

Les résultats pour ce choix de $y(x)$ et $f(x)$ sont alors affichés sur les figures suivantes pour différentes valeurs de pas h : la solution approchée y_k à gauche et l'erreur commise $|y(x_k) - y_k|$ à droite.

