Chapitre 9 : Equations différentielles avec conditions aux limites

Problème aux limites linéaire

Problème :

Soient un réel $L > 0$ et trois fonctions données $f(x)$, $p(x)$, $q(x) : [0, L] \mapsto \mathbb{R}$ continues par rapport à la variable x. On cherche à déterminer une fonction $y(x) \in C^2([0, L])$ qui satisfait (pour deux réels c_0 et c_L donnés)

$$\begin{cases} -\frac{d^2y}{dx^2} + p(x)\frac{dy}{dx} + q(x)y = f(x)\,, \quad x \in [0, L]\,, & \textit{(équation différentielle)} \\ \mathrm{cl}(0) = c_0\,,\ \mathrm{cl}(L) = c_L\,, & \textit{(conditions aux limites)} \end{cases} \tag{1}$$

avec $\mathrm{cl}(x)$ correspondant à une des deux options suivantes

$$\mathrm{cl}(x) = \begin{cases} y(x) & \textit{(condition de Dirichlet)}\ ; \\ \frac{dy}{dx}(x) & \textit{(condition de Neumann)}\,. \end{cases}$$

Le problème (1) est un *problème aux limites* linéaire unidimensionnel du second ordre.

La différence par rapport au problème de Cauchy (considéré dans le chapitre précédent) est dans le fait que les conditions sont imposées aux deux extrémités de l'intervalle sur lequel la solution est recherchée (une condition par extrémité).

Existence, unicité

Théorème 1 : *Si les fonctions $f(x)$, $p(x)$, $q(x)$ sont continues, $q(x)$ est plus grande ou égale à zéro sur $[0, L]$, et*

- *soit les conditions aux limites sont de type Dirichlet*
- *soit $p(x) = 0$ et au plus une des deux conditions est de type Neumann*

alors le problème aux limites

$$\left\{\begin{array}{rcl} -\frac{d^2y}{dx^2} + p(x)\frac{dy}{dx} + q(x)y & = & f(x)\,, \quad x \in [0, L]\,, \\ \mathrm{cl}(0) \;=\; c_0\,,\; \mathrm{cl}(L) & = & c_L\,, \end{array}\right. \tag{1}$$

admet une et une seule solution.

Dans ce qui suit nous considérons deux problèmes particuliers :

Problème de Poisson :

$$\left\{\begin{array}{rcll} -\frac{d^2y}{dx^2}(x) & = & f(x)\,, & x \in [0, L]\,, \\ \mathrm{cl}(0) \;=\; c_0\,,\; \mathrm{cl}(L) & = & c_L & \end{array}\right. \tag{2}$$

Problème de convection-diffusion :

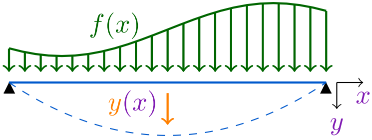
$$\left\{\begin{array}{rcl} -\frac{d^2y}{dx^2}(x) + p(x)\frac{dy}{dx}(x) & = & f(x)\,, \quad x \in [0, L]\,, \\ y(0) \;=\; c_0\,,\; y(L) & = & c_L \end{array}\right. \tag{3}$$

Equation de Poisson : applications

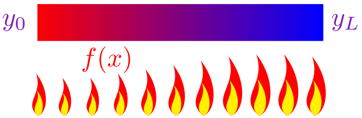
Le problème de Poisson

$$\begin{cases} -\frac{d^2y}{dx^2}(x) = f(x)\,, & x \in [0, L]\,, \\ \mathrm{cl}(0) = c_0\,,\ \mathrm{cl}(L) = c_L \end{cases} \tag{2}$$

a plusieurs applications, dont entre autres :



Application 1 : (2) décrit le déplacement $y(x)$ d'une corde de longueur L soumise à une densité de charge $f(x)$. Le déplacement aux deux extrémités est imposé avec les conditions de Dirichlet $y(0) = y(L) = 0$.



Application 2 : (2) décrit aussi la distribution stationnaire de température $y(x)$ dans une barre homogène ; $f(x)$ décrit alors la production de chaleur linéique. La conditions de Dirichlet $y = c$ revient à fixer la température c à une des extrémités ; la condition de Neumann $\frac{dy}{dx} = c'$ permet d'imposer un flux de chaleur à travers celle-ci.

Poisson : résolution par différences finies

Problème : Déterminer la solution approchée du problème aux limites

$$\begin{cases} -\dfrac{d^2y}{dx^2}(x) = f(x)\,, & x \in [0, L]\,, \\ \mathrm{cl}(0) = c_0\,,\ \mathrm{cl}(L) = c_L & \end{cases} \tag{2}$$

Résolution numérique :

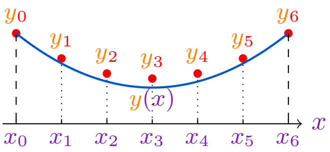
La méthode des *différences finies* consiste à approcher la solution exacte $y(x)$ sur l'intervalle $[0, L]$ aux $m+1$ points

$$0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_m = L\,,$$

par y_0 , y_1 , ... , y_m . Nous supposerons pour simplifier que $x_k = kh$, $k = 0, \ldots, m$, avec

$$h = L/m$$

le *pas de discrétisation*.



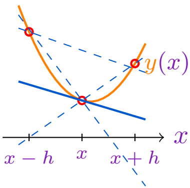
Approximation des dérivées

En considérant une fonction $y(x) \in C^3$ (pour dérivée première) ou $y(x) \in C^4$ (pour dérivée seconde) on a (avec justifications en Annexe) :

Dérivée première :

différence progressive :

$$\frac{dy}{dx}(x) = \frac{y(x+h) - y(x)}{h} + \mathcal{O}(h)$$



différence rétrograde :

$$\frac{dy}{dx}(x) = \frac{y(x) - y(x-h)}{h} + \mathcal{O}(h)$$

différence centrée :

$$\frac{dy}{dx}(x) = \frac{y(x+h) - y(x-h)}{2h} + \mathcal{O}(h^2)$$

Dérivée seconde :

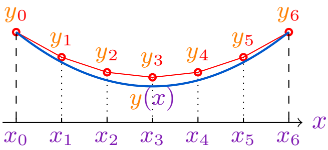
$$\frac{d^2y}{dx^2}(x) = \frac{y(x+h) + y(x-h) - 2y(x)}{h^2} + \mathcal{O}(h^2)$$

Différences finies : points intérieurs

Problème : Déterminer la solution approchée du problème aux limites

$$\begin{cases} -\frac{d^2y}{dx^2}(x) = f(x)\,, & x \in [0, L]\,, \\ \mathrm{cl}(0) = c_0\,,\ \mathrm{cl}(L) = c_L & \end{cases} \tag{2}$$

Pour un point x_k qui n'est pas sur le bord ($k \neq 0, m$), on approche la dérivée seconde avec la formule de la page précédente :



$$f(x_k) = -\frac{d^2y}{dx^2}(x_k) \approx \frac{-y(x_{k-1}) + 2y(x_k) - y(x_{k+1})}{h^2}\,.$$

En utilisant $y(x_k) \approx y_k$ cela permet d'obtenir $m-1$ équations linéaires reliant les différentes valeurs de y_k , $k = 0\,,\ldots,\,m$, entre elles.

Exemple : Pour la figure à droite les $m-1=5$ équations ($\times\, h^2$) sont

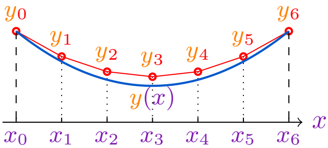
$$\begin{cases} -y_0 + 2y_1 - y_2 = h^2 f(x_1) \\ -y_1 + 2y_2 - y_3 = h^2 f(x_2) \\ -y_2 + 2y_3 - y_4 = h^2 f(x_3) \\ -y_3 + 2y_4 - y_5 = h^2 f(x_4) \\ -y_4 + 2y_5 - y_6 = h^2 f(x_5) \end{cases}$$

Différences finies : CL Dirichlet

Problème :
On cherche à déterminer la solution approchée du problème aux limites

$$\begin{cases} -\frac{d^2y}{dx^2}(x) = f(x)\,, & x \in [0, L]\,, \\ \mathrm{cl}(0) = c_0\,,\ \mathrm{cl}(L) = c_L \end{cases} \tag{2}$$

Notons que $m-1$ équations ne sont pas suffisantes pour déterminer les $m+1$ inconnues du problème ; les 2 équations restantes sont obtenues en utilisant les conditions aux limites.



CL de Dirichlet : $y(x) = c_x$ avec $x = 0, L$;

la condition revient à spécifier directement la valeur d'une des inconnues du système (y_0 ou y_m), ce qui donne une inconnue de moins par condition.

Exemple (suite) : avec $y(0) = y_0 = c_0$ et $y(L) = y_m = c_L$ on a

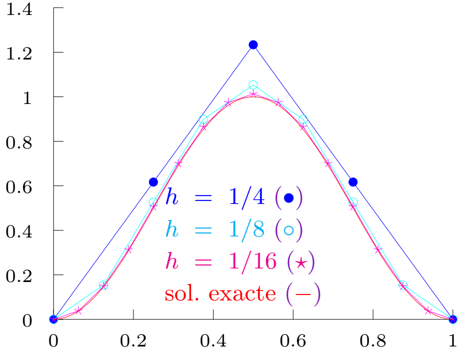
$$\begin{cases} 2y_1 - y_2 = h^2 f(x_1) + c_0 \\ -y_1 + 2y_2 - y_3 = h^2 f(x_2) \\ -y_2 + 2y_3 - y_4 = h^2 f(x_3) \\ -y_3 + 2y_4 - y_5 = h^2 f(x_4) \\ -y_4 + 2y_5 = h^2 f(x_5) + c_L \end{cases}$$

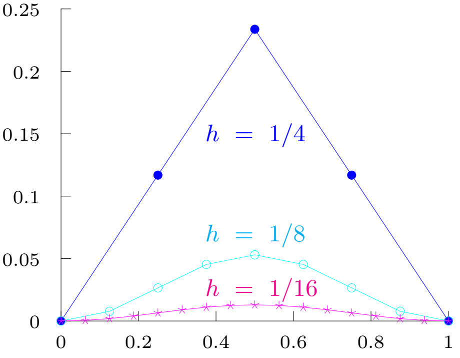
Exemple :

On considère la résolution du problème aux limites

$$\begin{cases} -\frac{d^2y}{dx^2}(x) = -2\pi^2\cos(2\pi x), \quad x \in [0,1], \\ y(0) = 0, \; y(1) = 0 \end{cases}$$

par la méthode des différences finies. La figure de gauche donne les solutions approchées pour $h = 1/4$, $1/8$, $1/16$ et la solution exacte $y(x) = \sin^2(\pi x)$; celle de droite présente l'erreur $|y_k - y(x_k)|$.



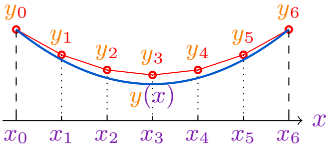


Différences finies : CL Neumann

Problème : Déterminer la solution approchée du problème aux limites

$$\begin{cases} -\frac{d^2y}{dx^2}(x) = f(x)\,, & x \in [0, L]\,, \\ \mathrm{cl}(0) = c_0\,,\ \mathrm{cl}(L) = c_L \end{cases} \tag{2}$$

CL de Neumann : $\frac{dy}{dx}(x) = c_x$ avec $x = 0, L$;



Prenons par exemple la condition $\frac{dy}{dx}(0) = c_0$. Une option est d'approcher directement la dérivée par une formule de différence non centrée, ce qui donne (à une erreur $\mathcal{O}(h)$ près),

$$(y(x_1) - y(x_0))/h \approx c_0\,. \tag{4}$$

Alternativement, on peut utiliser l'équation différentielle en 0 et utiliser le fait que la dérivée de la dérivée est la dérivée seconde :

$$(h/2)\cdot f(0) = -(h/2)\cdot\frac{d^2y}{dx^2}(0) = -\underbrace{\frac{dy}{dx}(h/2)}_{(y(x_1)-y(x_0))/h+\mathcal{O}(h^2)} + \underbrace{\frac{dy}{dx}(0)}_{c_0} + \mathcal{O}(h^2)$$

et donc (à une erreur $\mathcal{O}(h^2)$ près)

$$(y(x_1) - y(x_0))/h \approx c_0 - (h/2)\cdot f(0)\,. \tag{5}$$

Différences finies : CL Neumann (suite)

Problème : Déterminer la solution approchée du problème aux limites

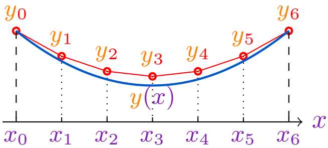
$$\begin{cases} -\frac{d^2y}{dx^2}(x) \;=\; f(x)\,, & x \in [0, L]\,, \\ \mathrm{cl}(0) \;=\; c_0\,,\; \mathrm{cl}(L) \;=\; c_L \end{cases} \qquad (2)$$

En résumé, la condition $\frac{dy}{dx}(0) = c_0$ peut être approchée, utilisant $y_k \approx y(x_k)$, soit par une formule moins précise

$$(y_1 - y_0)/h \;=\; c_0\,, \qquad (4)$$

soit par une formule plus précise (et recommandée)

$$(y_1 - y_0)/h \;=\; c_0 - (h/2) \cdot f(0)\,. \qquad (5)$$



Exemple (suite) : avec $\frac{dy}{dx}(0) \;=\; c_0$ et $y(L) \;=\; c_L$ on a (en utilisant (5))

$$\begin{cases} y_0 \; - y_1 & = -hc_0 + (h^2/2) \cdot f(0) \\ -y_0 + 2y_1 - y_2 & = h^2 f(x_1) \\ -y_1 + 2y_2 - y_3 & = h^2 f(x_2) \\ -y_2 + 2y_3 - y_4 & = h^2 f(x_3) \\ -y_3 + 2y_4 - y_5 & = h^2 f(x_4) \\ -y_4 + 2y_5 & = h^2 f(x_5) + c_L \end{cases}$$

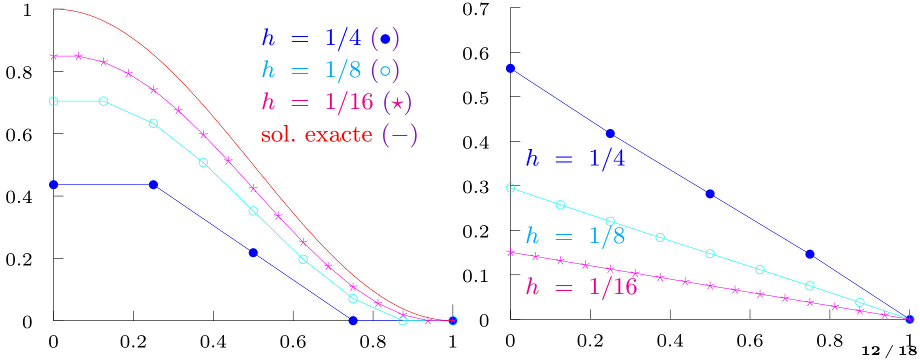
CL Neumann : exemple (formule moins précise)

Exemple :

On considère la résolution du problème aux limites

$$\begin{cases} -\dfrac{d^2y}{dx^2}(x) \;=\; -\pi^2/2\cdot\cos(\pi(x+1))\,, \quad x\in[0,1]\,, \\ \dfrac{dy}{dx}(0) \;=\; 0\,,\; y(1) \;=\; 0 \end{cases}$$

par la méthode des différences finies et en utilisant l'approximation moins précise (4) pour la condition de Neumann. La figure de gauche donne les solutions approchées pour $h = 1/4$, $1/8$, $1/16$ et la solution exacte $y(x) = \sin^2(\pi(x+1)/2)$; celle de droite présente l'erreur $|y_k - y(x_k)|$.



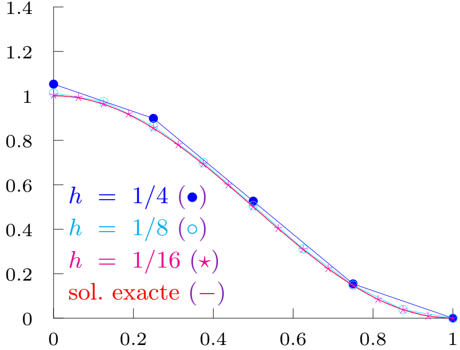
CL Neumann : exemple (formule plus précise)

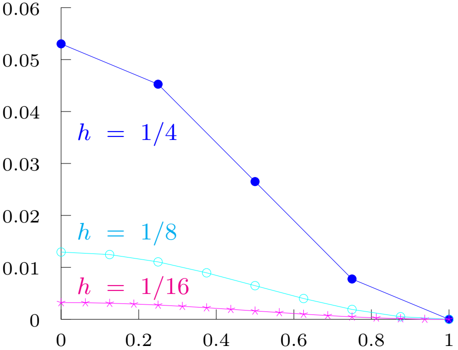
Exemple :

On considère la résolution du problème aux limites

$$\begin{cases} -\frac{d^2y}{dx^2}(x) \;=\; -\pi^2/2 \cdot \cos(\pi(x+1)), \quad x \in [0,1], \\ \frac{dy}{dx}(0) \;=\; 0, \; y(1) \;=\; 0 \end{cases}$$

par la méthode des différences finies et en utilisant l'approximation plus précise (5) pour la condition de Neumann. La figure de gauche donne les solutions approchées pour $h \;=\; 1/4, 1/8, 1/16$ et la solution exacte $y(x) = \sin^2(\pi(x+1)/2)$; celle de droite présente l'erreur $|y_k - y(x_k)|$.





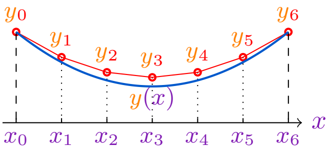
Convection-diffusion : différences centrées

Problème : Déterminer la solution approchée du problème aux limites

$$\begin{cases} -\frac{d^2y}{dx^2}(x) + p(x)\frac{dy}{dx}(x) & = & f(x)\,, \quad x \in [0, L]\,, \\ y(0) \;=\; c_0\,,\; y(L) & = & c_L \end{cases} \tag{3}$$

Terme de convection : $p(x)\frac{dy}{dx}(x)$;

Pour un point x_k qui n'est pas sur le bord ($k \neq 0, m$), on peut approcher la dérivée dans le terme de convection par une formule de différence centrée :



$$\frac{dy}{dx}(x_k) \;=\; \frac{y(x_{k+1}) - y(x_{k-1})}{2h} + \mathcal{O}(h^2)$$

La version discrète de l'équation différentielle devient alors (pour $x_k \neq 0, L$)

$$-\underbrace{y_{k+1} + 2y_k - y_{k-1}}_{\approx \text{ dérivée seconde } \times h^2} + \underbrace{(hp(x_k)/2)(y_{k+1} - y_{k-1})}_{\approx\, p(x_k)\times \text{ dérivée première } \times h^2} \;=\; h^2 f(x_k)\,.$$

En particulier, si

$$hp(x) \;\gg\; 1$$

le second terme est dominant, et il ne relie que des variables dont les indices ont la même parité. Cela peut mener à des oscillations dans la solution.

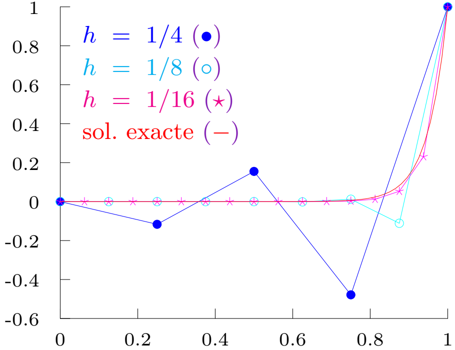
Convection-diffusion : instabilité

Exemple :

On considère la résolution du problème aux limites

$$\begin{cases} -\frac{d^2y}{dx^2}(x) + 20\frac{dy}{dx}(x) \ = \ 0\,, \quad x \in [0,1]\,, \\ y(0) \ = \ 0\,,\ y(1) \ = \ 1 \end{cases}$$

par la méthode des différences finies et en approchant la dérivée première dans le terme de convection par une *différence centrée*. La figure donne les solutions approchées pour $h \ = \ 1/4\,,\ 1/8\,,\ 1/16$ et la solution exacte $y(x) = (e^{20x} - 1)/(e^{20} - 1)\,.$



Convection-diffusion : schéma upwind

Problème : Déterminer la solution approchée du problème aux limites

$$\begin{cases} -\frac{d^2y}{dx^2}(x) + p(x)\frac{dy}{dx}(x) = f(x)\,, \quad x \in [0, L]\,, \\ y(0) = c_0\,,\; y(L) = c_L \end{cases} \tag{3}$$

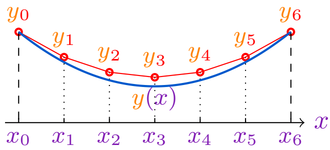
Terme de convection : $p(x)\frac{dy}{dx}(x)$;

Pour éviter les problèmes d'instabilité on utilise le schéma *upwind* ; si $p(x_k) > 0$, on considère la différence rétrograde

$$\frac{dy}{dx}(x_k) = \frac{y(x_k) - y(x_{k-1})}{h} + \mathcal{O}(h)$$

alors que pour $p(x_k) \leq 0$, la différence progressive est utilisée

$$\frac{dy}{dx}(x_k) = \frac{y(x_{k+1}) - y(x_k)}{h} + \mathcal{O}(h)\,.$$



Notons que ce schéma d'approximation est moins précis, mais il permet d'éviter des oscillations telles qu'observées dans le cas de la différence centrée.

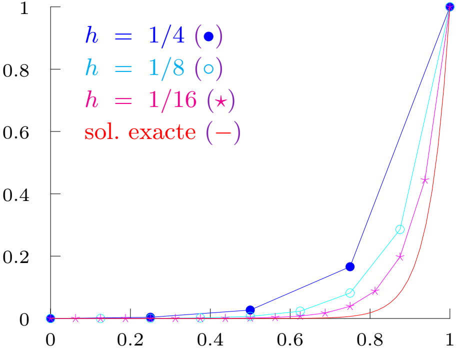
Schéma upwind : exemple

Exemple :

On considère la résolution du problème aux limites

$$\begin{cases} -\frac{d^2y}{dx^2}(x) + 20\frac{dy}{dx}(x) = 0\,, & x \in [0,1]\,, \\ y(0) = 0\,,\ y(1) = 1 \end{cases}$$

par la méthode des différences finies et en approchant la dérivée première dans le terme de convection par un *schéma upwind*. La figure donne les solutions approchées pour $h = 1/4$, $1/8$, $1/16$ et la solution exacte $y(x) = (e^{20x} - 1)/(e^{20} - 1)$.



Annexe : formules de différence

Dérivée première :

Comme pour toute fonction $y \in C^3$ on a

$$y(x \pm h) \;=\; y(x) \pm h\frac{dy}{dx}(x) + \frac{h^2}{2}\frac{d^2y}{dx^2}(x) + \mathcal{O}(h^3)\,,$$

le terme de l'erreur pour les différences progressive et rétrograde s'en suit directement ; l'erreur pour la différence centrée est obtenue en soustrayant la formule avec "$+$" de celle avec "$-$" :

$$y(x+h) - y(x-h) \;=\; 2h\frac{dy}{dx}(x) + \mathcal{O}(h^3)\,.$$

Dérivée seconde :

Comme pour toute fonction $y \in C^4$ on a

$$y(x \pm h) \;=\; y(x) \pm h\frac{dy}{dx}(x) + \frac{h^2}{2}\frac{d^2y}{dx^2}(x) \pm \frac{h^3}{3!}\frac{d^3y}{dx^3}(x) + \mathcal{O}(h^4)\,,$$

on obtient, en additionnant les formules avec "$+$" et "$-$",

$$y(x+h) + y(x-h) \;=\; 2y(x) + h^2\frac{d^2y}{dx^2}(x) + \mathcal{O}(h^4)\,,$$

et la formule pour la dérivée seconde (avec le terme de l'erreur) s'en suit

$$\frac{d^2y}{dx^2}(x) \;=\; \frac{y(x-h) - 2y(x) + y(x+h)}{h^2} + \mathcal{O}(h^2)\,.$$