# Chapitre 8 : Equations différentielles avec conditions initiales


1. Généralités
   - Equations différentielles
   - Systèmes d'équations différentielles
   - Equations d'ordre deux et plus
   - Existence, unicité
   - Résolution numérique
2. Méthodes d'Euler
   - Méthode d'Euler progressive
   - Méthode d'Euler rétrograde
   - Méthodes d'Euler : implicite vs. explicite
   - Méthodes d'Euler : convergence
3. Stabilité
   - Stabilité : généralités
   - Méthodes d'Euler : stabilité
   - Stabilité : généralisations
4. Méthodes du second ordre
   - Méthode de Crank-Nicolson
   - Méthode de Heun
5. Méthodes multi-pas
6. Annexe : régions de stabilité

# Equations différentielles

## Problème (scalaire)

Soient un réel $T > 0$ et une fonction donnée $f(t, y) : [0, T] \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ continue par rapport aux deux variables $t$ et $y$ ($t$ sera appelé le *temps*). On cherche à déterminer une fonction *scalaire* $y(t) \in C^1([0, T])$ qui satisfait (pour un réel $y_0$ donné)

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt}(t) = f(t, y(t)), & t \in [0, T], \quad \text{(équation différentielle)} \\ y(0) = y_0. & \text{(condition initiale)} \end{cases} \tag{1}$$

Ce problème est un *problème de Cauchy.*

Si l'on intègre la première équation entre $0$ et $t$, on obtient (avec $\int_0^t \frac{dy}{dt}(\tau)d\tau = y(t) - y(0)$ )

$$y(t) = y_0 + \int_0^t f(\tau, y(\tau))d\tau.$$

Note : Si $f(t, y)$ ne dépend pas de $y$, le problème est équivalent à l'intégration numérique d'une fonction sur l'intervalle $[0, t]$.

# Systèmes d'équations différentielles

**Problème (vectoriel)**
Soient un réel $T > 0$ et une fonction donnée $\mathbf{f}(t, \mathbf{y}) : [0, T] \times \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ continue par rapport aux deux variables $t$ et $\mathbf{y}$. On cherche à déterminer une fonction *vectorielle* $\mathbf{y}(t) \in \mathbf{C}^1([0, T])$ qui satisfait (pour un vecteur $\mathbf{y}_0 \in \mathbb{R}^n$ donné)

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{y}}{dt}(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)), & t \in [0, T], \quad \text{(système différentiel)} \\ \mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0. & \text{(condition initiale)} \end{cases}$$

Ce problème est un *problème de Cauchy vectoriel.*

Si l'on intègre la première équation entre $0$ et $t$, on obtient

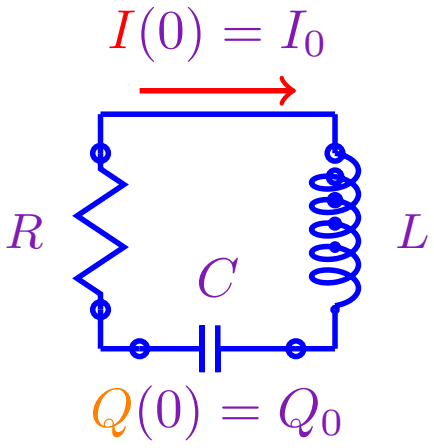
$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{y}_0 + \int_0^t \mathbf{f}(\tau, \mathbf{y}(\tau)) d\tau \ ;$$

rappelons que l'intégrale entre $0$ et $t$ d'un vecteur $\mathbf{v}(t) = (v_i(t))$ est un vecteur dont la composante $i$ vaut $\int_0^t v_i(\tau) d\tau$.

**Note :** La formulation des problèmes scalaire et vectoriel est analogue, et cette analogie s'étend aussi aux méthodes numériques.

# Equations d'ordre deux et plus

**Exemple :**




L'évolution d'un circuit RLC peut être décrite par une équation différentielle d'ordre 2 (avec $Q(t)$ comme fonction inconnue) :

$$\begin{cases} L\frac{d^2Q}{dt^2} + R\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C}Q = 0 \\ Q(0) = Q_0\,, \qquad \frac{dQ}{dt}(0) = I_0 \end{cases}$$

ou, alternativement, en introduisant l'inconnue $I(t) = \frac{dQ}{dt}(t)$ de courant, par le système différentiel d'ordre 1 suivant

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} I \\ Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{R}{L}I - \frac{1}{CL}Q \\ I \end{pmatrix} \\ Q(0) = Q_0\,, \qquad I(0) = I_0\,. \end{cases}$$

*De manière générale, tout problème de Cauchy d'ordre $n$ est équivalent à un problème de Cauchy vectoriel de dimension $n$ et d'ordre 1.*

En particulier, en considérant le cas $n = 2$ en toute généralité, on a

$$\begin{cases} \frac{d^2y}{dt^2} = f(t\,,\, y\,,\, \frac{dy}{dt}) \\ y(0) = y_0\,, \quad \frac{dy}{dt}(0) = y_0' \end{cases} \quad \Longleftrightarrow^{u = \frac{dy}{dt}} \quad \begin{cases} \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} u \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(t\,,\, y\,,\, u) \\ u \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} u(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0' \\ y_0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

# Existence, unicité

On dit que la fonction $f(t,y)$ est *lipschitzienne* en $y$ s'il existe un réel $\ell$ tel que pour tout $t \in [0,T]$, $y_1$ et $y_2$ on a

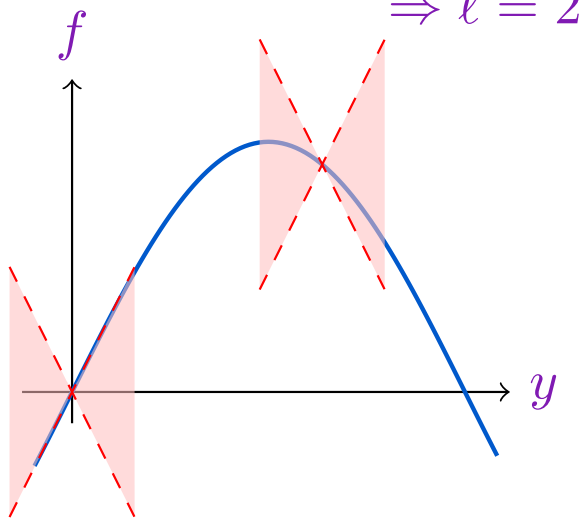
$$|f(t,y_1) - f(t,y_2)| \;\leq\; \ell\,|y_1 - y_2|\,.$$

En particulier, si $\frac{\partial f}{\partial y}(t,y)$ existe et, pour tout $t \in [0,T]$ et tout $y$, elle satisfait

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}(t,y)\right| \;\leq\; \ell\,,$$

alors la fonction est lipschitzienne en $y$.

$f(t,y) = 2\sin(y)$
$\Rightarrow \ell = 2$




**Théorème 1 :** *Si la fonction $f(t,y)$ est continue et lipschitzienne en $y$, alors le problème de Cauchy*

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt}(t) \;=\; f(t,y(t))\,, & t \in [0,T]\,, \\ y(0) \;=\; y_0\,. \end{cases}$$

*admet une et une seule solution.*

**Note :** dans ce qui suit nous admettrons que la fonction $f(t,y)$ est continue et lipschitzienne en $y$. Cela nous permettra, entre autres, de rechercher *la* solution du problème de Cauchy sans se demander si une telle solution existe.

# Résolution numérique

**Problème (scalaire)**

On cherche à déterminer la solution approchée du problème de Cauchy

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt}(t) = f(t, y(t)), & t \in [0, T], \\ y(0) = y_0. \end{cases} \tag{1}$$

La solution exacte $y(t)$ du problème satisfait l'équation intégrale

$$y(t) = y_0 + \int_0^t f(\tau, y(\tau)) d\tau .$$

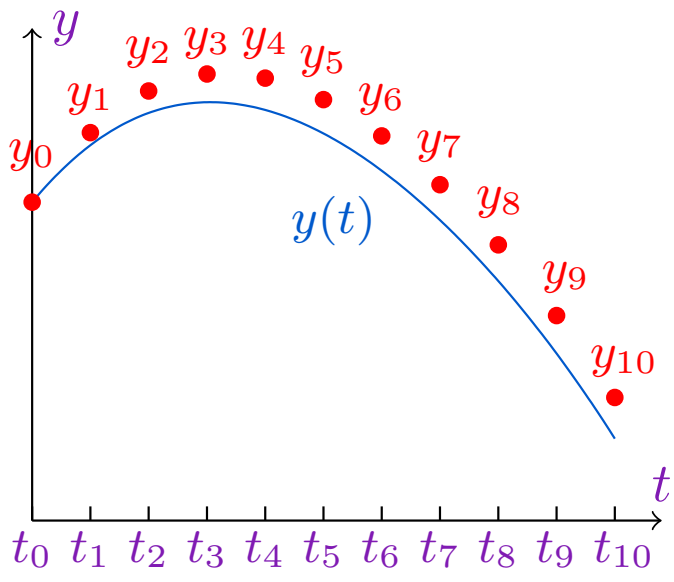
**Résolution numérique :**

On se propose d'approcher la solution exacte $y(t)$ sur l'intervalle $[0, T]$ aux points $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = T$ par $y_0, y_1, \ldots, y_m$.

**Note :** La distance entre deux points successifs

$$h_k = t_{k+1} - t_k$$

est le *pas de discrétisation* (aussi appelé *pas d'intégration*).



# Méthode d'Euler progressive

**Problème (scalaire)**

On cherche à déterminer la solution approchée du problème de Cauchy

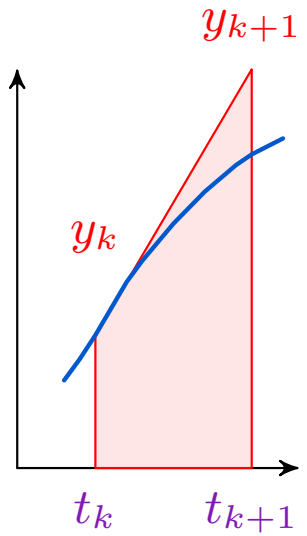
$$\begin{cases} \frac{dy}{dt}(t) = f(t, y(t)), & t \in [0, T], \\ y(0) = y_0. \end{cases} \tag{1}$$

La solution exacte $y(t)$ du problème satisfait l'équation intégrale

$$y(t) = y_0 + \int_0^t f(\tau, y(\tau)) d\tau .$$

La méthode d'*Euler progressive* (ou *Euler explicite*) consiste à approcher la dérivée au point $t_k$ par

$$f(t_k, y(t_k)) = \frac{dy}{dt}(t_k) \approx \frac{y(t_{k+1}) - y(t_k)}{\underbrace{t_{k+1} - t_k}_{h_k}} .$$




En utilisant $y_k \approx y(t_k)$, $y_{k+1} \approx y(t_{k+1})$ et en isolant $y_{k+1}$ on a

$$\boxed{y_{k+1} = y_k + h_k f(t_k, y_k)} .$$

# Méthode d'Euler progressive (suite)

**Problème (scalaire)**

On cherche à déterminer la solution approchée du problème de Cauchy

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt}(t) = f(t, y(t)), & t \in [0, T], \\ y(0) = y_0. \end{cases} \tag{1}$$

La solution exacte $y(t)$ du problème satisfait l'équation intégrale

$$y(t) = y_0 + \int_0^t f(\tau, y(\tau)) d\tau .$$

Alternativement, on peut obtenir la méthode d'*Euler progressive* à partir de la formulation intégrale, en notant que cette dernière implique

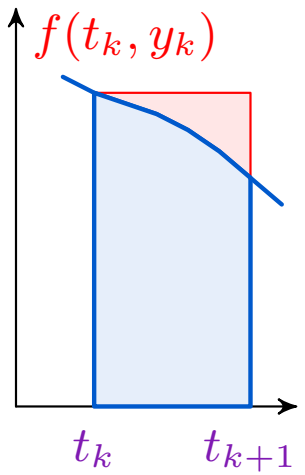
$$y(t_{k+1}) = y(t_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(\tau, y(\tau)) d\tau .$$

En utilisant l'approximation

$$f(\tau, y(\tau)) \approx f(t_k, y_k) = \text{const} \qquad \text{sur } [t_k, t_{k+1}],$$

on retrouve de nouveau

$$\boxed{y_{k+1} = y_k + h_k f(t_k, y_k)}.$$



# Méthode d'Euler rétrograde

**Problème (scalaire)**

On cherche à déterminer la solution approchée du problème de Cauchy

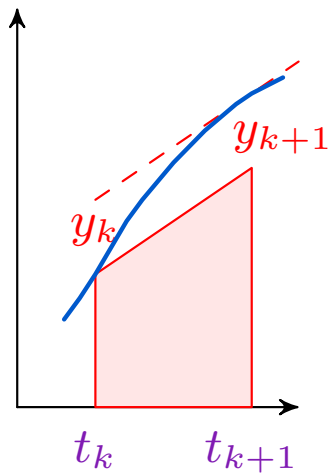
$$\begin{cases} \frac{dy}{dt}(t) = f(t, y(t)), & t \in [0, T], \\ y(0) = y_0. \end{cases} \tag{1}$$

La solution exacte $y(t)$ du problème satisfait l'équation intégrale

$$y(t) = y_0 + \int_0^t f(\tau, y(\tau)) d\tau .$$

La méthode d'*Euler rétrograde* (ou *Euler implicite*) consiste à approcher la dérivée au point $t_{k+1}$ par

$$f(t_{k+1}, y(t_{k+1})) = \frac{dy}{dt}(t_{k+1}) \approx \frac{y(t_{k+1}) - y(t_k)}{\underbrace{t_{k+1} - t_k}_{h_k}} .$$




En utilisant $y_k \approx y(t_k)$, $y_{k+1} \approx y(t_{k+1})$ on a

$$\boxed{y_{k+1} = y_k + h_k f(t_{k+1}, y_{k+1})} .$$

# Méthode d'Euler rétrograde (suite)

**Problème (scalaire)**

On cherche à déterminer la solution approchée du problème de Cauchy

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt}(t) &= f(t, y(t)) \,, \qquad t \in [0, T] \,, \\ y(0) &= y_0 \,, \end{cases} \tag{1}$$

La solution exacte $y(t)$ du problème satisfait l'équation intégrale

$$y(t) = y_0 + \int_0^t f(\tau, y(\tau)) d\tau \,.$$

Alternativement, on peut obtenir la méthode d'*Euler rétrograde* à partir de la formulation intégrale. En utilisant de nouveau

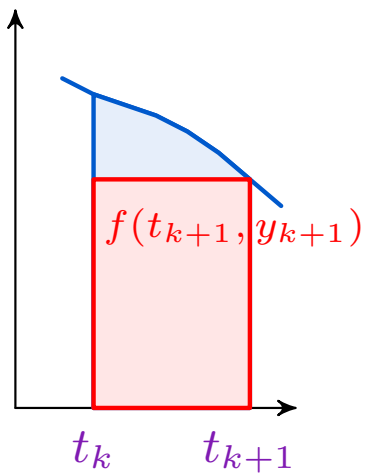
$$y(t_{k+1}) = y(t_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(\tau, y(\tau)) d\tau \,.$$

ainsi que l'approximation

$$f(\tau, y(\tau)) \approx f(t_{k+1}, y_{k+1}) = \text{const} \qquad \text{sur } [t_k, t_{k+1}] \,,$$

on retrouve

$$\boxed{y_{k+1} = y_k + h_k f(t_{k+1}, y_{k+1})} \,.$$



# Méthodes d'Euler : implicite vs. explicite

**Euler progressive :** $y_{k+1} = y_k + h_k f(t_k, y_k)\,.$ (2)

Pour la méthode d'Euler progressive, il suffit de substituer la valeur $y_k$ dans la formule (2) pour obtenir $y_{k+1}$ :

pas 1 : $y_1 = y_0 + h_0 f(t_0, y_0)$
pas 2 : $y_2 = y_1 + h_1 f(t_1, y_1)$
$\ldots$

Il s'agit d'une méthode *explicite*.

**Euler rétrograde :** $y_{k+1} = y_k + h_k f(t_{k+1}, y_{k+1})\,.$ (3)

Dans le cas d'Euler rétrograde, la formule de récurrence (3) ne donne pas directement la valeur $y_{k+1}$ à partir de $y_k$ ; pour l'obtenir, il faut résoudre une équation non linéaire définie par (3) par rapport à $y_{k+1}$ :

pas 1 : résoudre $y_1 = y_0 + h_0 f(t_1, y_1)$ par rapport à $y_1$
pas 2 : résoudre $y_2 = y_1 + h_1 f(t_2, y_2)$ par rapport à $y_2$
$\ldots$

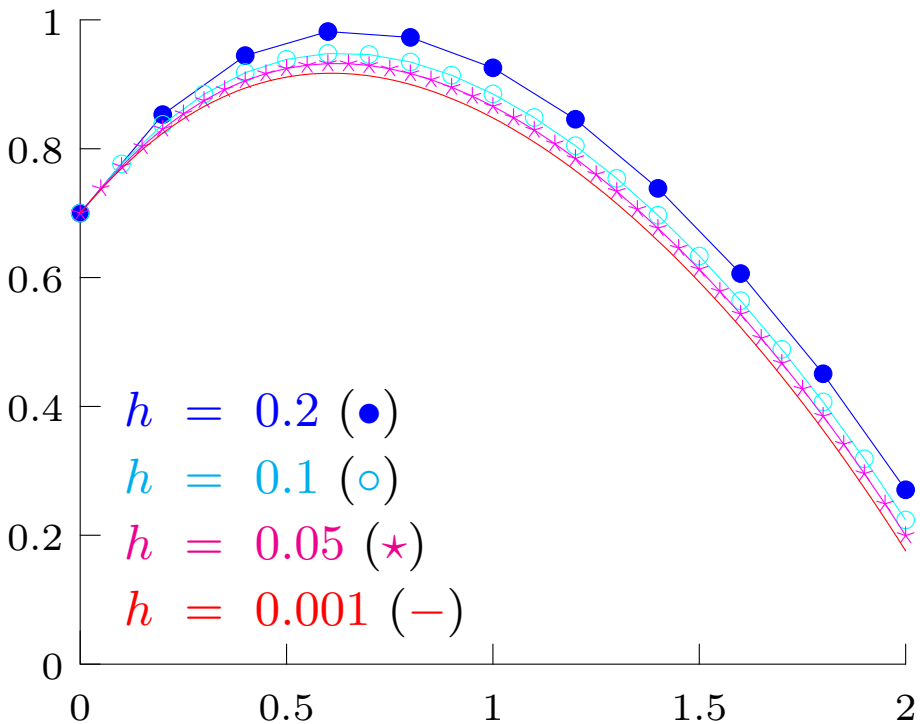
Il s'agit d'une méthode *implicite*.

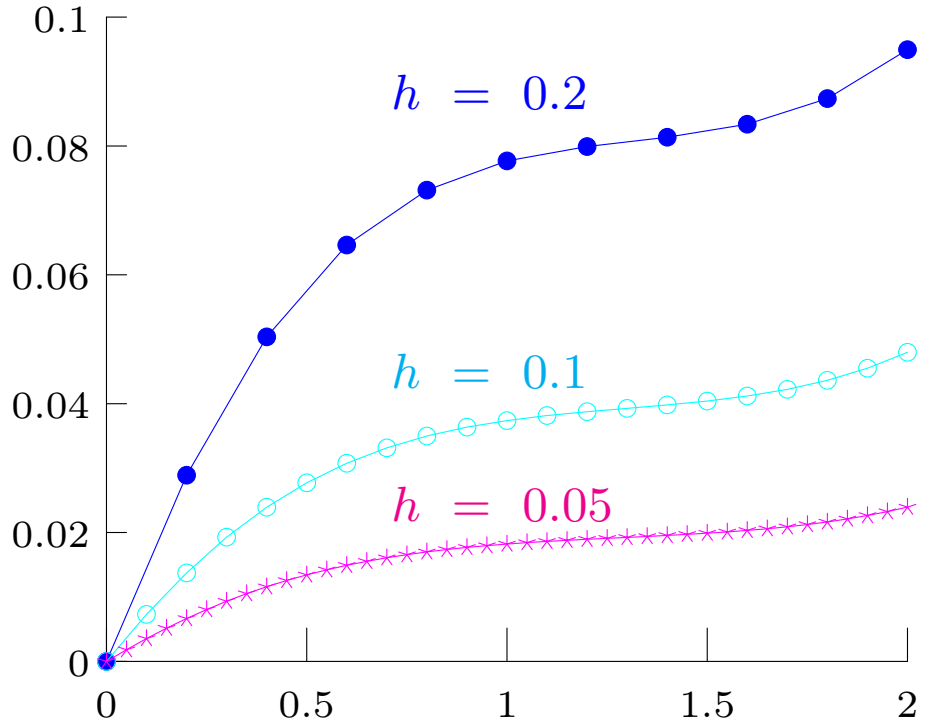
# Méthodes d'Euler : convergence

Exemple : Considérons la résolution approchée du problème de Cauchy

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt}(t) = \cos(y) - t\,, & t \geq 0\,, \\ y(0) = 0.7\,, \end{cases}$$

par la méthode d'Euler progressive. La figure de gauche donne les solutions approchées pour $h = 0.2\,, 0.1\,, 0.05$ et $0.001$ ; celle de droite contient l'estimation de l'erreur $|y_k - y(t_k)|$ (la solution approchée pour $h = 0.001$ fait office de solution exacte $y(t)$) .



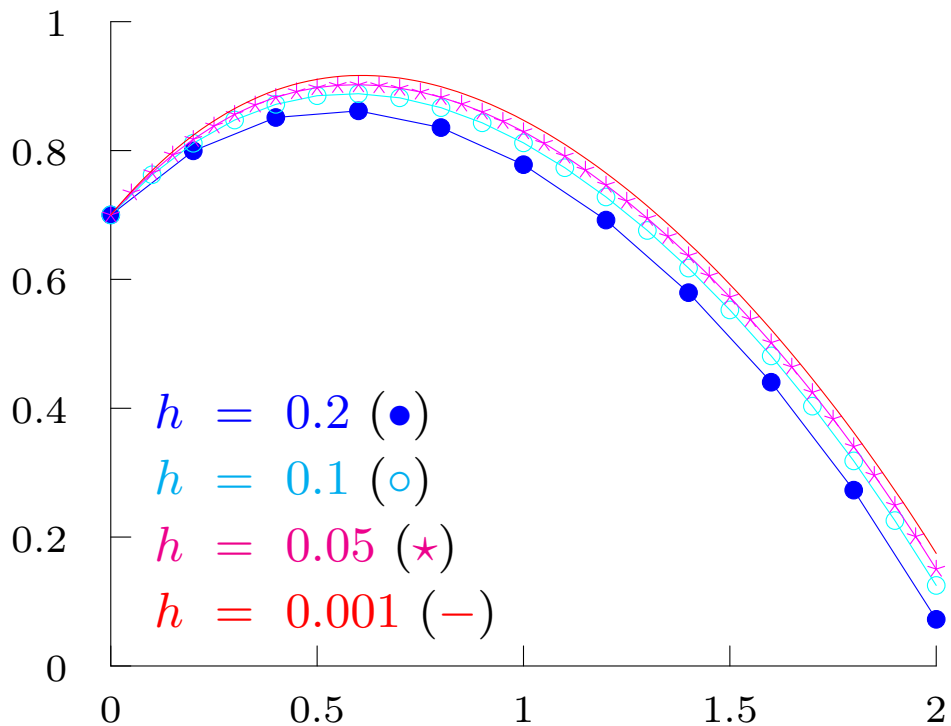

Observation : L'erreur $|y_k - y(t_k)|$ semble proportionnelle à $h$ .

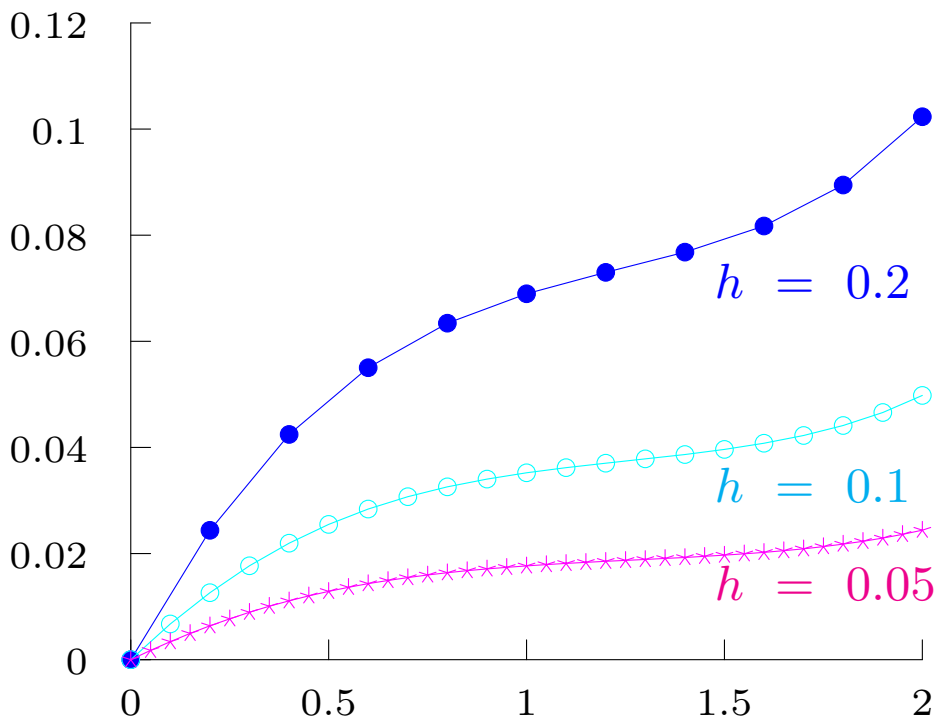
# Méthodes d'Euler : convergence (suite)

Exemple : Considérons la résolution approchée du problème de Cauchy

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt}(t) = \cos(y) - t\,, & t \geq 0\,, \\ y(0) = 0.7\,, \end{cases}$$

par la méthode d'Euler rétrograde. La figure de gauche donne les solutions approchées pour $h = 0.2$, $0.1$, $0.05$ et $0.001$ ; celle de droite contient l'estimation de l'erreur $|y_k - y(t_k)|$ (la solution approchée pour $h = 0.001$ fait office de solution exacte $y(t)$).




Observation : De nouveau, l'erreur $|y_k - y(t_k)|$ est proportionnelle à $h$.

# Méthodes d'Euler : convergence (suite)

Le théorème suivant formalise les observations des exemples précédents.

**Théorème 2 :**
*Soit $f(t,y)$ une fonction continue et à dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial t}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ continues. Supposons de plus que cette fonction est lipschitzienne en $y$.*

*Soit $y(t)$ l'unique solution du problème de Cauchy (1) associée à $f$, et soit $y_k$ la solution approchée au point $t_k = hk$, avec $h = T/m$ et $k = 0, \dots m$, obtenue par la méthode d'Euler progressive ou rétrograde.*

*Alors il existe une constante $C > 0$ (indépendante de $h$ mais qui peut dépendre de $T$) telle que*

$$\max_k |y_k - y(t_k)| \leq Ch\,.$$

Dit autrement, pour autant que les hypothèses du théorème soient satisfaites, la solution approchée $y_k$, $k = 0, \dots, m$, converge vers la solution exacte $y(t)$ lorsque $h \to 0$.

**Vocabulaire :** La méthode de résolution d'une équation différentielle est d'*ordre $n$* si

$$\max_k |y_k - y(t_k)| \leq Ch^n\,.$$

Les méthodes d'Euler sont donc des méthodes du premier ordre.

# Méthodes d'Euler : cas scalaire vs. vectoriel

Principe : les méthodes d'Euler ont des expressions identiques (aux notations près) dans le cas scalaire et vectoriel.

| cas scalaire | cas vectoriel |
|---|---|
| Problème : | |
| $\begin{cases} \frac{dy}{dt}(t) = f(t, y(t)), & t \in [0, T], \\ y(0) = y_0. \end{cases}$ | $\begin{cases} \frac{d\mathbf{y}}{dt}(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)), & t \in [0, T], \\ \mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0. \end{cases}$ |
| Méthode d'Euler progressive : pour $k = 0, 1, \ldots$ | |
| calculer $y_{k+1} = y_k + h_k f(t_k, y_k)$ | calculer $\mathbf{y}_{k+1} = \mathbf{y}_k + h_k \mathbf{f}(t_k, \mathbf{y}_k)$ |
| Méthode d'Euler rétrograde : pour $k = 0, 1, \ldots$ | |
| résoudre $y_{k+1} = y_k + h_k f(t_{k+1}, y_{k+1})$ | résoudre $\mathbf{y}_{k+1} = \mathbf{y}_k + h_k \mathbf{f}(t_{k+1}, \mathbf{y}_{k+1})$ |

# Stabilité : généralités

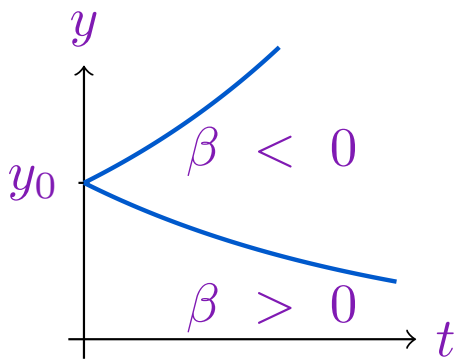
Considérons à présent le problème de Cauchy suivant (avec $T \to \infty$) :

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt}(t) \;=\; -\beta\, y(t)\,, \qquad t \;>\; 0\,, \\ y(0) \;=\; y_0\,. \end{cases} \tag{4}$$

La solution exacte du problème est

$$y(t) \;=\; y_0\, e^{-\beta t}\,;$$

elle tend vers zéro pour $\beta \;>\; 0$ et croît pour $\beta \;<\; 0$.




Une méthode de résolution est *absolument stable* (ou simplement *stable*) pour le problème de Cauchy (4) avec $\beta \;>\; 0$ si elle produit une séquence $y_k$, $k = 1, 2, \ldots$, d'approximations de $y(t_k)$ telle que

$$y_k \;\to\; 0 \quad \text{lorsque} \quad t_k \;\to\; \infty\,.$$

# Euler progressive : stabilité

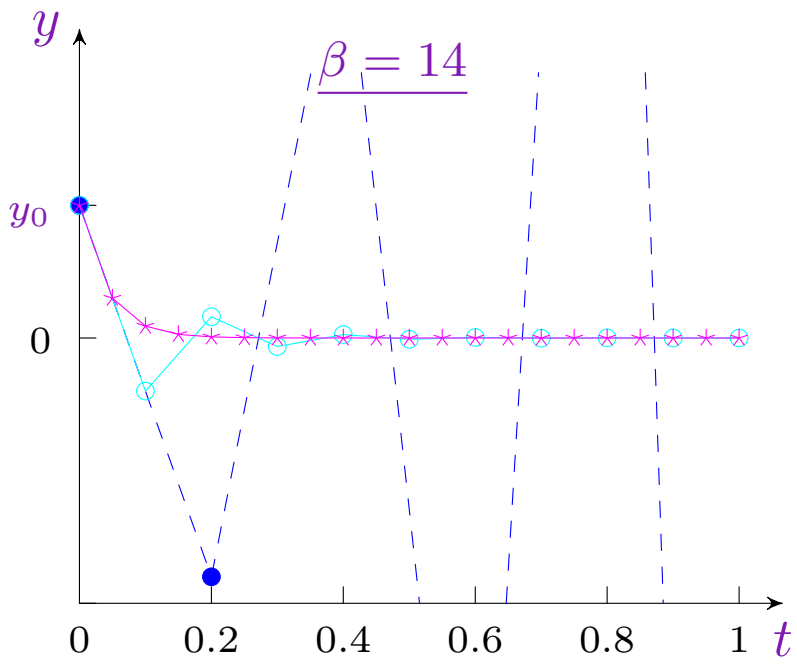
Considérons les pas de discrétisation $h$ constants $\Rightarrow \quad t_k = hk\,,\ k = 0, 1, 2\ldots$

Euler progressive : $y_{k+1} = y_k + h\underbrace{f(t_k, y_k)}_{-\beta y_k} = y_k(1 - h\beta)$

et donc

$$\boxed{y_k = y_0(1 - h\beta)^k}\,.$$

- $h\beta < 1$
  - $\Rightarrow \quad y_k = y_0|1 - h\beta|^k \to 0$
  - $\Rightarrow$ (stable, non oscillant)
- $1 \leq h\beta < 2$
  - $\Rightarrow \quad y_k = y_0|1 - h\beta|^k(-1)^k \to 0$
  - $\Rightarrow$ (stable, oscillant)
- $h\beta > 2$
  - $\Rightarrow \quad y_k = y_0|1 - h\beta|^k(-1)^k$ diverge
  - $\Rightarrow$ (instable)




$h = 0.05$ ($\star$) ; $h = 0.1$ ($\circ$) ; $h = 0.2$ ($\bullet$)

Conclusion : Méthode d'Euler progressive est absolument stable si $h\beta < 2$.

# Euler rétrograde : stabilité

Considérons les pas de discrétisation $h$ constants $\Rightarrow$ $t_k = hk$, $k = 0, 1, 2 \ldots$

Euler rétrograde : $y_{k+1} = y_k + h \underbrace{f(t_{k+1}, y_{k+1})}_{-\beta y_{k+1}}$

ce qui implique $y_{k+1}(1 + h\beta) = y_k$ et donc

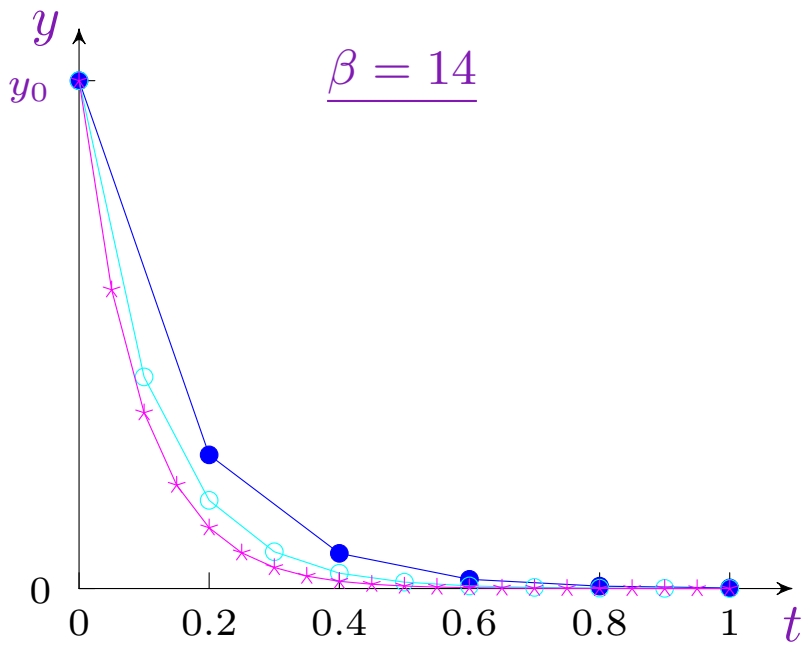
$$\boxed{y_k = y_0 \frac{1}{(1+h\beta)^k}}.$$

En particulier, comme $h$ et $\beta$ sont positifs, on a

$$\frac{1}{1+h\beta} < 1,$$

et donc $y_k \to 0$ pour tout $h > 0$.

Conclusion : Méthode d'Euler rétrograde est toujours absolument stable.




$h = 0.05$ ($\star$) ; $h = 0.1$ ($\circ$) ; $h = 0.2$ ($\bullet$)

# Stabilité : problèmes non homogènes

La stabilité est étudiée par rapport au problème de Cauchy :

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt}(t) = -\beta\, y(t)\,, & t > 0\,, \\ y(0) = y_0\,. \end{cases} \tag{4}$$

Est-il utile d'étudier la stabilité sur base d'un problème aussi simple ?

Généralisation 1 : Cas non homogène

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt}(t) = -\beta\, y(t) + b\,, & t > 0\,, \\ y(0) = y_0\,. \end{cases}$$

Un changement de variable $\widetilde{y}(t) = y(t) - \frac{b}{\beta}$ permet de retrouver le problème de Cauchy de départ (avec une condition initiale modifiée).

De même, en résolvant le problème non homogène avec, par exemple, Euler progressive, on a

$$y_{k+1} = y_k + h(-\beta y_k + b)\,.$$

En utilisant un changement de variable similaire $\widetilde{y}_k = y_k - \frac{b}{\beta}$ on retrouve aussi le cas homogène

$$\widetilde{y}_{k+1} = \widetilde{y}_k(1 - h\beta)\,.$$

Conclusion : On retrouve la même récurrence (et donc la même analyse) que pour le cas homogène, et elle est indépendante de $b$.

# Stabilité : problèmes non homogènes

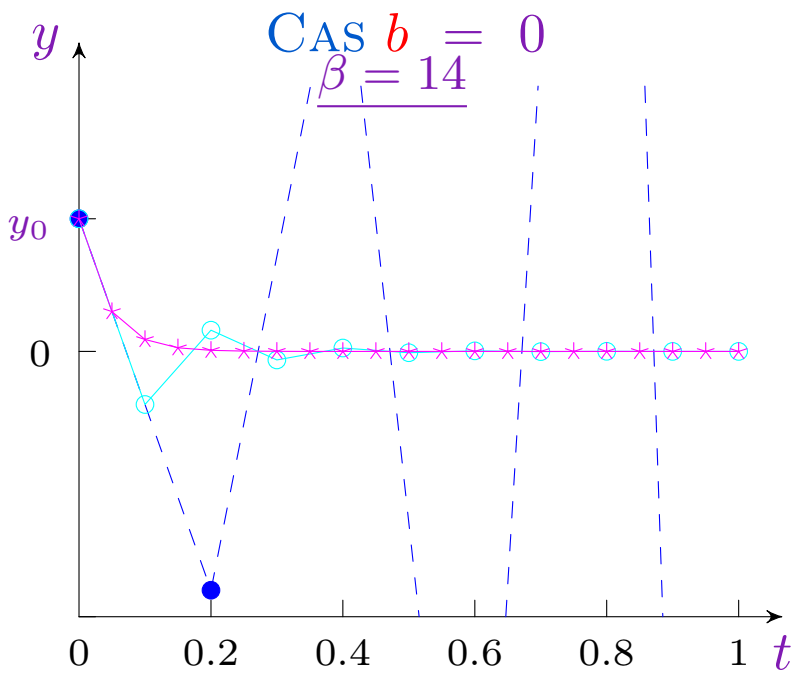
La stabilité est étudiée par rapport au problème de Cauchy :

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt}(t) = -\beta\, y(t)\,, & t > 0\,, \\ y(0) = y_0\,. \end{cases} \tag{4}$$

Est-il utile d'étudier la stabilité sur base d'un problème aussi simple ?

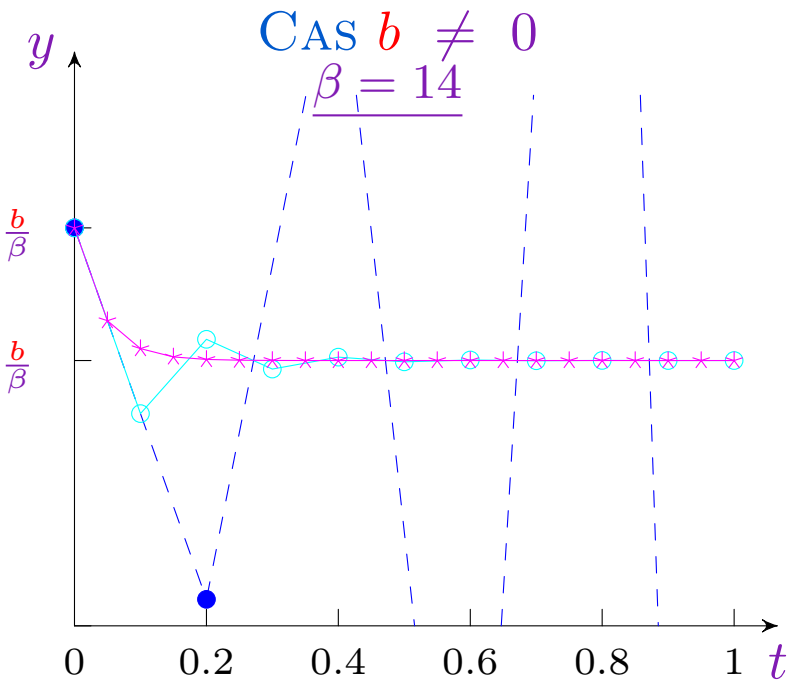
## Généralisation 1 : Cas non homogène

## Exemple (suite)




$h = 0.05$ ($\star$) ; $h = 0.1$ ($\circ$) ; $h = 0.2$ ($\bullet$)

$y(0) = y_0 + \frac{b}{\beta}$



# Stabilité : problèmes non linéaires

La stabilité est étudiée par rapport au problème de Cauchy :

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt}(t) = -\beta\, y(t)\,, & t > 0\,, \\ y(0) = y_0\,. \end{cases} \tag{4}$$

Est-il utile d'étudier la stabilité sur base d'un problème aussi simple ?

Généralisation 2 : Cas non linéaire

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt}(t) = f(t, y(t))\,, & t > 0\,, \\ y(0) = y_0\,. \end{cases}$$

A travers le développement de Taylor au voisinage de $(t_k\,, y_k)$

$$f(t,\, y) \approx f(t,\, y_k) + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial y}(t,\, y_k)}_{-\beta(t)} (y - y_k) = b(t) - \beta(t)\, y\,,$$

on retrouve, avec $b(t) = f(t,\, y_k) + \beta(t) y_k$ , le cas non homogène sur l'intervalle où $\beta(t)$, $b(t)$ varient peu.

Conclusion : Si la fonction $f$ est suffisamment régulière, l'analyse de la stabilité dans le cas non homogène s'applique localement.

# Stabilité : problèmes non linéaires

La stabilité est étudiée par rapport au problème de Cauchy :

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt}(t) = -\beta\, y(t)\,, & t > 0\,, \\ y(0) = y_0\,. \end{cases} \tag{4}$$

Est-il utile d'étudier la stabilité sur base d'un problème aussi simple ?

**Généralisation 2 :** Cas non linéaire

**Exemple**

Nous résolvons le problème de Cauchy

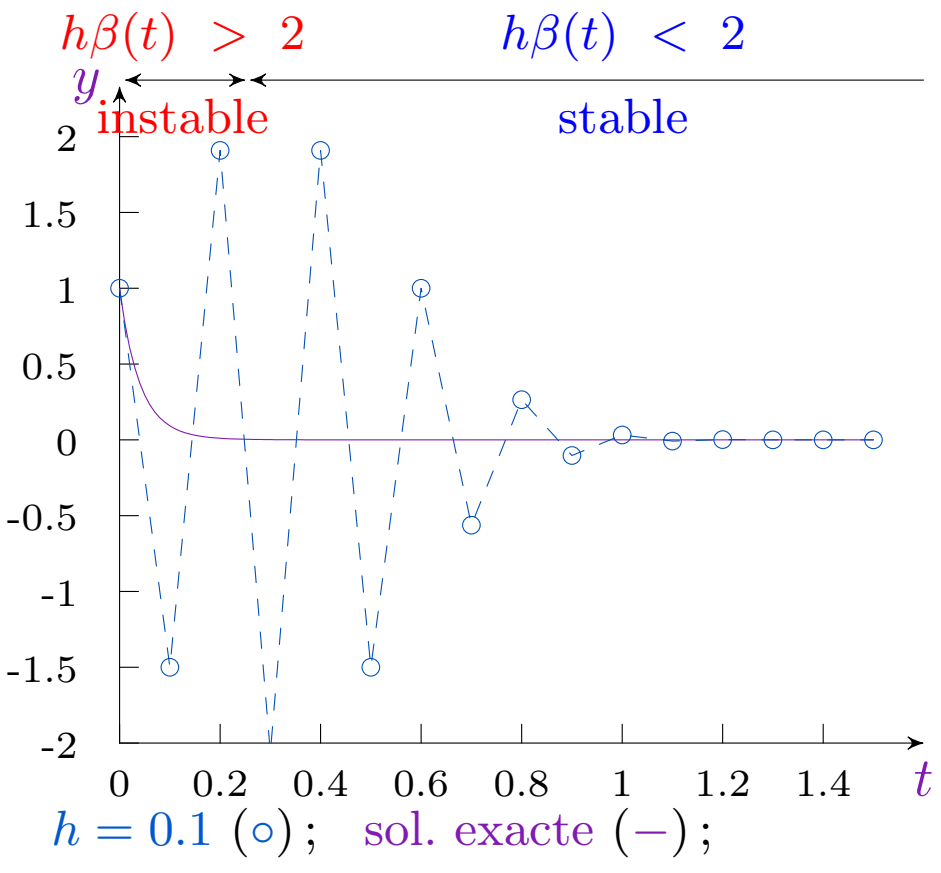
$$\begin{cases} \frac{dy}{dt}(t) = -\frac{25}{t+1}\, y(t)\,, & t > 0\,, \\ y(0) = y_0\,. \end{cases}$$

avec la méthode d'Euler progressive de pas $h = 0.1$.

Dans ce cas $b = 0$ et $\beta(t) = \frac{25}{t+1}$.

La solution exacte est

$$y(t) = \frac{y_0}{(t+1)^{25}}\,.$$



# Stabilité : systèmes

La stabilité est étudiée par rapport au problème de Cauchy :

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt}(t) = -\beta\, y(t)\,, & t > 0\,, \\ y(0) = y_0\,. \end{cases} \tag{4}$$

Est-il utile d'étudier la stabilité sur base d'un problème aussi simple ?

Généralisation 3 : Cas des systèmes linéaires

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{y}}{dt}(t) = -A\,\mathbf{y}(t)\,, & t > 0\,, \\ \mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0\,. \end{cases}$$

Si $A$ est diagonalisable, on décompose en modes propres via $A = P^{-1}\mathrm{diag}(\beta_i)P$ (avec $\beta$ potentiellement complexe !) et, en utilisant $\mathbf{z} = P\mathbf{y}$, on aboutit à un système de $n$ équations non homogènes découplées :

$$\text{pour } i = 1, \ldots, n \text{ on a } \begin{cases} \frac{dz_i}{dt}(t) = -\beta_i z_i(t)\,, & t > 0\,, \\ z_i(0) = (P\mathbf{y}_0)_i\,. \end{cases}$$

Conclusion (sol. exacte) : Dans le cas des systèmes linéaires le problème vectoriel peut être découplé en $n$ problèmes scalaires, avec $\beta_i$ les valeurs propres de $A$. La solution exacte est stable si $\mathrm{Re}(\beta_i) > 0$ pour toute valeur propre $\beta_i$ de $A$.

# Stabilité : systèmes

La stabilité est étudiée par rapport au problème de Cauchy :

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt}(t) = -\beta\, y(t)\,, & t > 0\,, \\ y(0) = y_0\,. \end{cases} \tag{4}$$

Est-il utile d'étudier la stabilité sur base d'un problème aussi simple ?

Généralisation 3 : Cas des systèmes linéaires

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{y}}{dt}(t) = -A\,\mathbf{y}(t)\,, & t > 0\,, \\ \mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0\,. \end{cases}$$

Dans ce cas la méthode d'Euler progressive devient

$$\mathbf{y}_{k+1} = \mathbf{y}_k + h\underbrace{\mathbf{f}(t_k, \mathbf{y}_k)}_{-A\mathbf{y}_k} = (I - hA)\mathbf{y}_k\,.$$

En utilisant de nouveau $A = P^{-1}\mathrm{diag}(\beta_i)P$ et $\mathbf{z}_k = P\mathbf{y}_k$ on obtient $n$ relations de récurrence identiques au cas scalaire

$$(\mathbf{z}_{k+1})_i = (1 - h\beta_i)(\mathbf{z}_k)_i\,.$$

Conclusion (Euler progressive) : Dans le cas des systèmes linéaires la condition de stabilité $|1 - h\beta_i| < 1$ doit être vérifiée pour toute valeur propre $\beta_i$ de $A$.

# Stabilité : systèmes

La stabilité est étudiée par rapport au problème de Cauchy :

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt}(t) = -\beta\, y(t)\,, & t > 0\,, \\ y(0) = y_0\,. \end{cases} \tag{4}$$

Est-il utile d'étudier la stabilité sur base d'un problème aussi simple ?

Généralisation 3 : Cas des systèmes linéaires

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{y}}{dt}(t) = -A\,\mathbf{y}(t)\,, & t > 0\,, \\ \mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0\,; \end{cases}$$

Dans ce cas la méthode d'Euler rétrograde devient

$$\mathbf{y}_{k+1} = \mathbf{y}_k + h\underbrace{\mathbf{f}(t_{k+1},\mathbf{y}_{k+1})}_{-A\mathbf{y}_{k+1}} = \mathbf{y}_k - hA\mathbf{y}_{k+1} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{y}_{k+1} = (I+hA)^{-1}\mathbf{y}_k\,.$$

Avec $A = P^{-1}\mathrm{diag}(\beta_i)P$ et $\mathbf{z}_k = P\mathbf{y}_k$ on obtient $n$ relations de récurrence identiques au cas scalaire

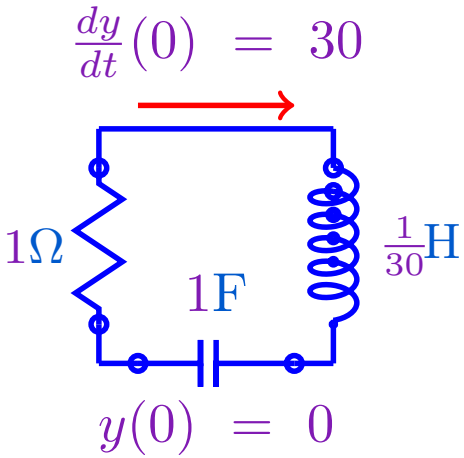
$$(\mathbf{z}_{k+1})_i = (\mathbf{z}_k)_i/(1+h\beta_i)\,.$$

Conclusion (Euler rétrograde) : Dans le cas des systèmes linéaires la condition de stabilité est vérifiée d'office par toute valeur propre $\beta_i$ de $A$ telle que $\mathrm{Re}(\beta_i) > 0$.

# Stabilité : systèmes (suite)

## Généralisation 3 : Cas des systèmes linéaires

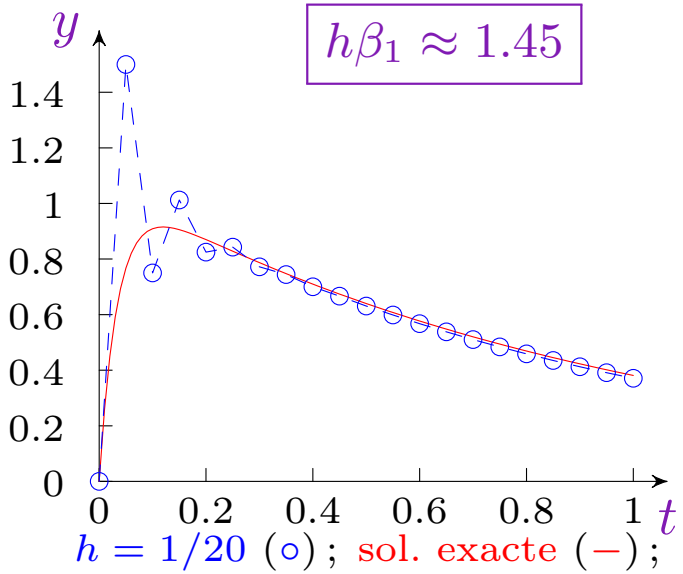
**Exemple** (Exemple 3 de la Motivation) : Circuit RLC

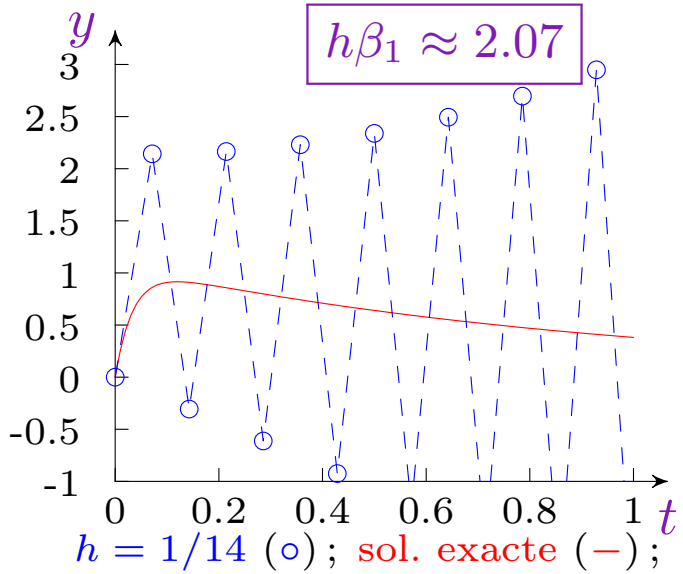



$$\begin{cases} \underbrace{\dfrac{d}{dt}\begin{pmatrix} I \\ Q \end{pmatrix}}_{\frac{d\mathbf{y}}{dt}(t)} = \underbrace{\begin{pmatrix} -30 & -30 \\ 1 & \end{pmatrix}}_{-A} \underbrace{\begin{pmatrix} I \\ Q \end{pmatrix}}_{\mathbf{y}(t)} \\ Q(0) = 0\,, \qquad I(0) = 30\,. \end{cases}$$

Les valeurs propres de $A$ sont $\beta_1 \approx 29$ et $\beta_2 \approx 1$.

La méthode d'Euler progressive donne :

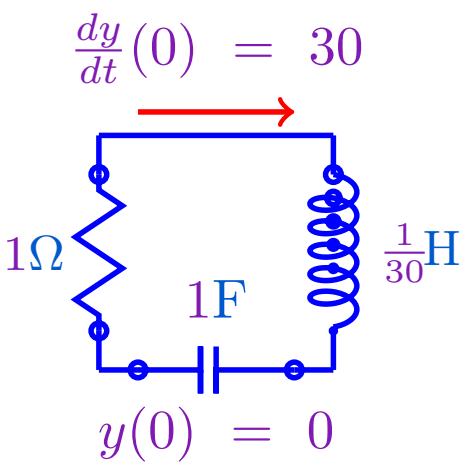


# Stabilité : systèmes (suite)

## Généralisation 3 : Cas des systèmes linéaires

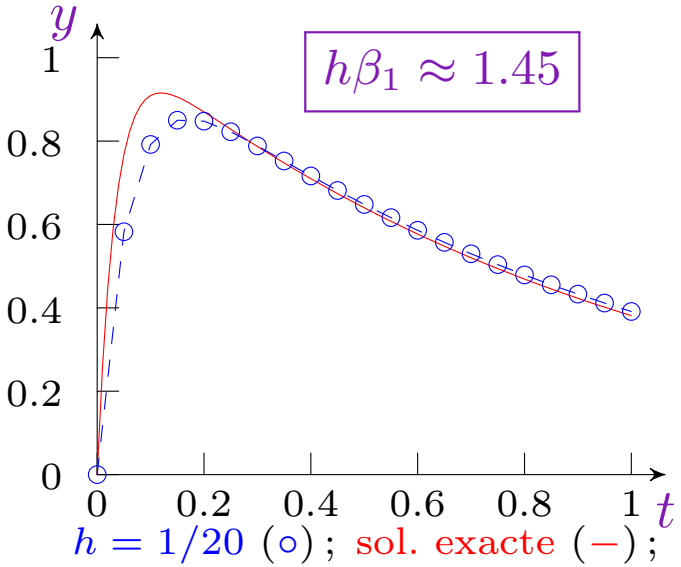
**Exemple** (Exemple 3 de la Motivation) : Circuit RLC

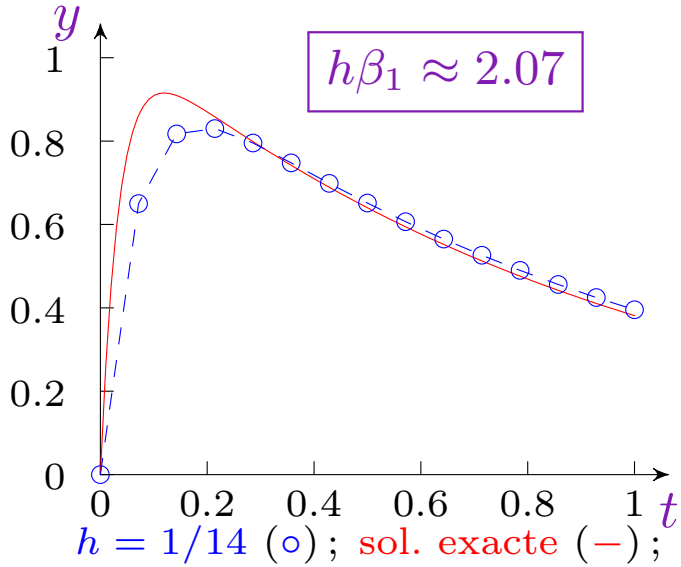



$$\begin{cases} \underbrace{\dfrac{d}{dt}\begin{pmatrix} I \\ Q \end{pmatrix}}_{\frac{d\mathbf{y}}{dt}(t)} = \underbrace{\begin{pmatrix} -30 & -30 \\ 1 & \end{pmatrix}}_{-A} \underbrace{\begin{pmatrix} I \\ Q \end{pmatrix}}_{\mathbf{y}(t)} \\ Q(0) = 0\,, \qquad I(0) = 30\,. \end{cases}$$

Les valeurs propres de $A$ sont $\beta_1 \approx 29$ et $\beta_2 \approx 1$.

La méthode d'Euler rétrograde donne :



# Stabilité : systèmes (suite)

De manière générale, soit un problème de Cauchy vectoriel suivant :

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{y}}{dt}(t) \;=\; -A\,\mathbf{y}(t)\,, \qquad t \;>\; 0\,, \\ \mathbf{y}(0) \;=\; \mathbf{y}_0\,, \end{cases}$$

dont la matrice réelle $A$ d'ordre $n \times n$ possède $n$ valeurs propres $\beta_i \in \mathbb{C}$, $i = 1, \ldots, n$.

La solution exacte peut s'écrire sous la forme (**sans démonstration**) :

$$\mathbf{y}(t) \;=\; \sum_{i=1}^{n} \mathbf{c}_i \; p_i(t) \; e^{-\beta_i t}\,, \quad \mathbf{c}_i \in \mathbb{R}^n\,,$$

où le degré du polynôme $p_i(t)$ est strictement inférieur à la multiplicité de $\beta_i$.

Note : La solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre $n$ a la même forme, avec le terme $p_i(t)$ polynomial nécessaire si la racine $\beta_i$ du polynôme caractéristique est une racine multiple.

On notera (**sans démonstration**, mais par analogie avec le cas où $A$ est diagonalisable) que :

- la solution exacte $\mathbf{y}(t)$ est bornée si $\mathrm{Re}(\beta_i) \;>\; 0$ ;
- Euler rétrograde est stable pour tout $h$ ;
- Euler progressive est stable si $|1 - h\beta_i| \;<\; 1, \quad i = 1, \ldots, n$.

# Méthode de Crank-Nicolson

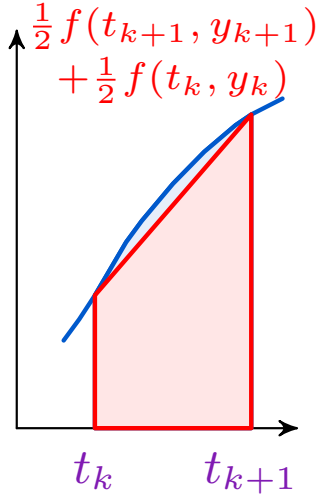
Rappelons que la solution exacte $y(t)$ satisfait (cf. page 8)

$$y(t_{k+1}) \;=\; y(t_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(\tau, y(\tau))d\tau\,.$$

La méthode de *Crank-Nicolson* s'obtient en approchant l'intégrale par la formule des trapèzes

$$\boxed{y_{k+1} \;=\; y_k + \frac{1}{2}h_k\Big(f(t_k, y_k) + f(t_{k+1}, y_{k+1})\Big)}\,,$$

où, comme avant, $h_k \;=\; t_{k+1} - t_k$ .




Notons que la méthode est :

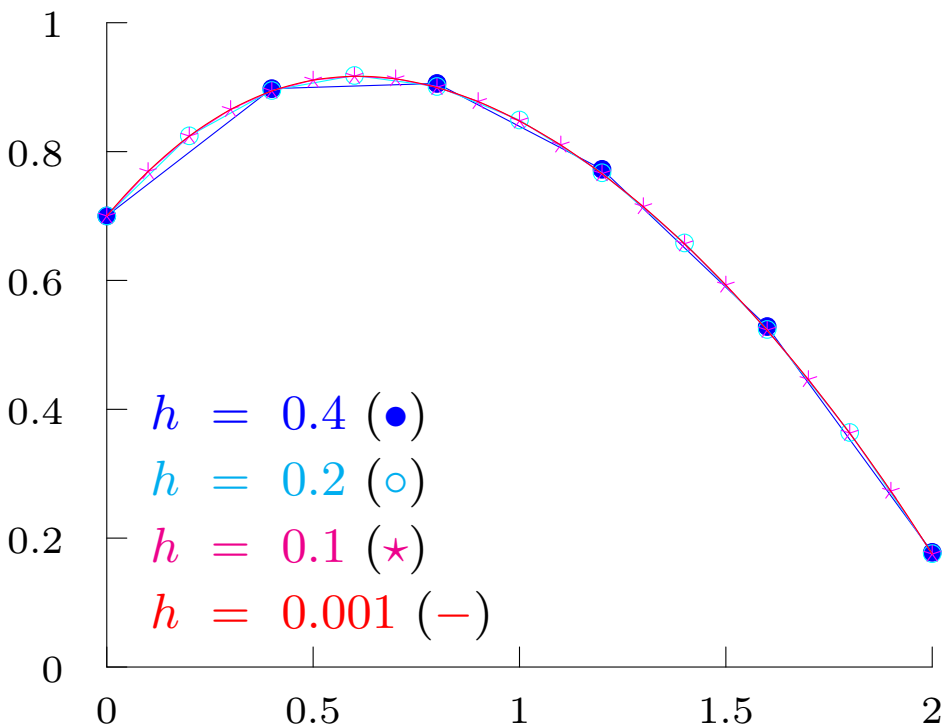
- implicite ($y_{k+1}$ se retrouve comme argument de $f$ dans le membre de droite)
- du second ordre
- stable quel que soit le pas $h_k$ (tout comme Euler rétrograde)

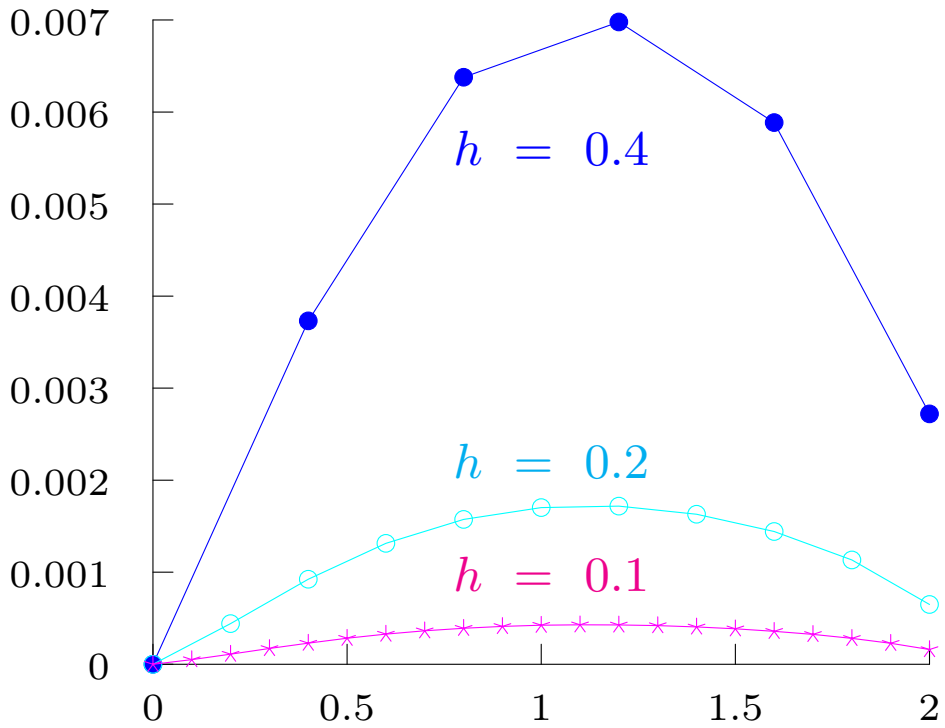
# Crank-Nicolson : ordre

**Exemple (suite) :** Reprenons le problème de Cauchy

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt}(t) = \cos(y) - t\,, & t \geq 0\,, \\ y(0) = 0.7\,, \end{cases}$$

et résolvons-le par la méthode de Crank-Nicolson. La figure de gauche donne les solutions approchées pour $h = 0.4\,, 0.2\,, 0.1$ et $0.001$ ; celle de droite contient l'estimation de l'erreur $|y_k - y(t_k)|$ (la solution approchée pour $h = 0.001$ fait office de solution exacte $y(t)$ ) .

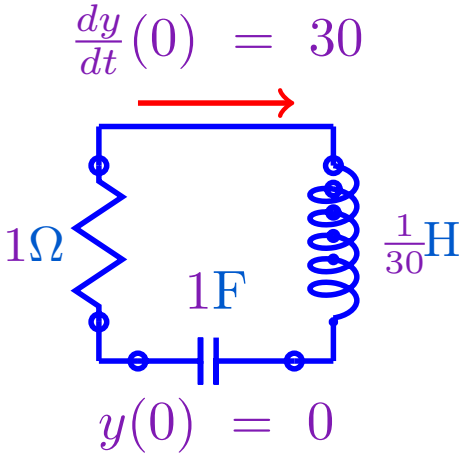



**Observation :** $|y_k - y(t_k)| \propto h^2$ et la méthode est en effet d'ordre 2.

# Crank-Nicolson : stabilité

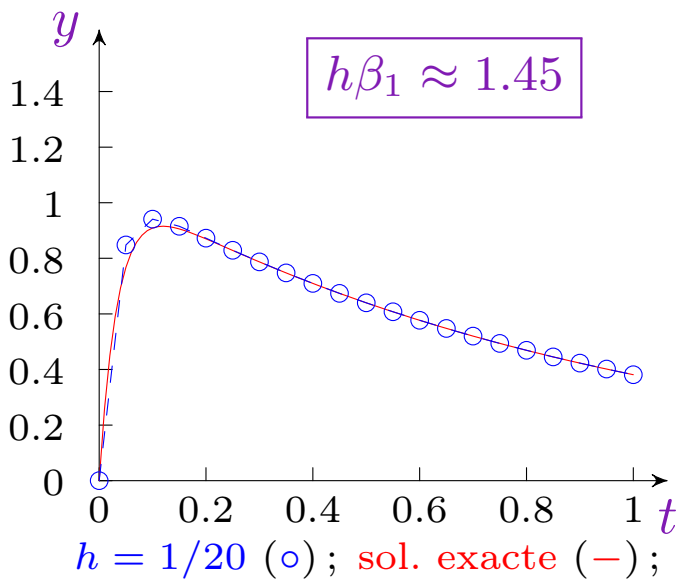
**Exemple** (Exemple 3 de la Motivation) : Circuit RLC



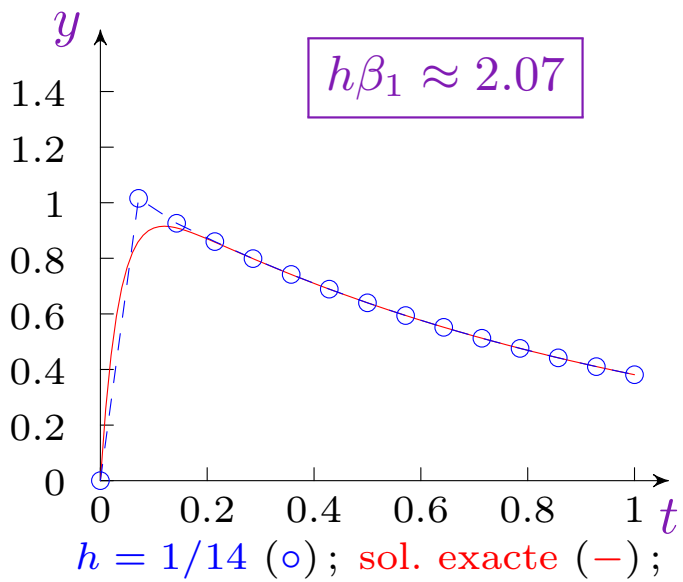

$$\begin{cases} \underbrace{\dfrac{d}{dt}\begin{pmatrix} I \\ Q \end{pmatrix}}_{\frac{d\mathbf{y}}{dt}(t)} = \underbrace{\begin{pmatrix} -30 & -30 \\ 1 & \end{pmatrix}}_{-A} \underbrace{\begin{pmatrix} I \\ Q \end{pmatrix}}_{\mathbf{y}(t)} \\ Q(0) = 0\,, \qquad I(0) = 30\,. \end{cases}$$

Les valeurs propres de $A$ sont $\beta_1 \approx 29$ et $\beta_2 \approx 1$.

La méthode de Crank-Nicolson donne :



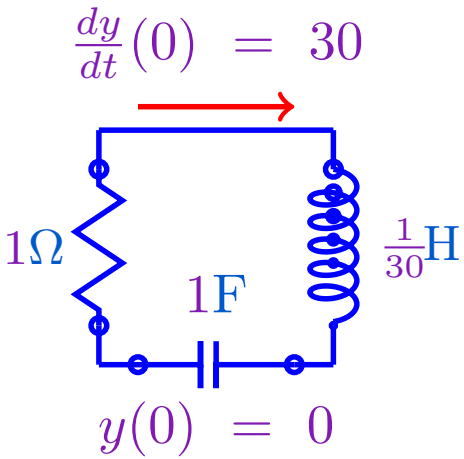

$h = 1/20$ (∘) ; sol. exacte (−) ;




$h = 1/14$ (∘) ; sol. exacte (−) ;

# Crank-Nicolson et Euler rétrogr. : cas $h\beta \gg 2$

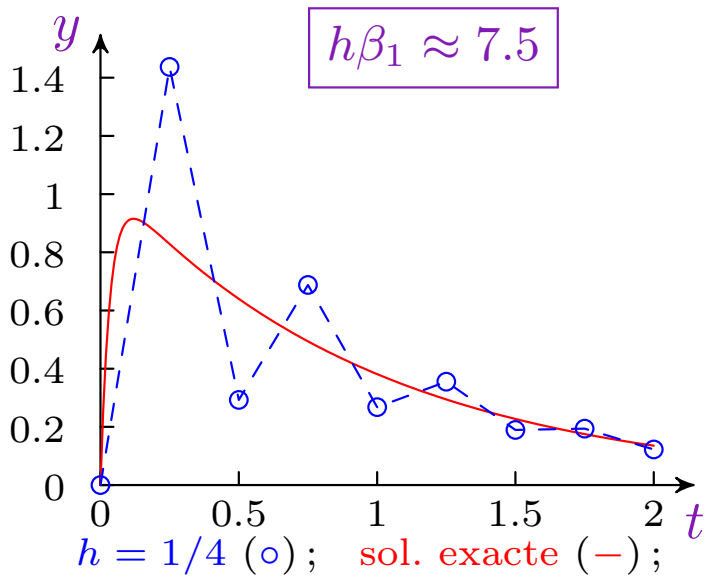
**Exemple** (Exemple 3 de la Motivation) : Circuit RLC

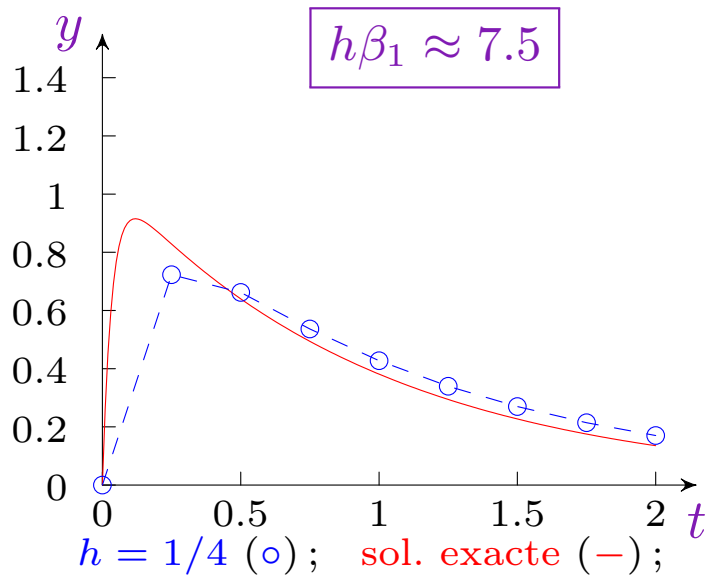



$$\begin{cases} \underbrace{\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} I \\ Q \end{pmatrix}}_{\frac{d\mathbf{y}}{dt}(t)} = \underbrace{\begin{pmatrix} -30 & -30 \\ 1 & \end{pmatrix}}_{-A} \underbrace{\begin{pmatrix} I \\ Q \end{pmatrix}}_{\mathbf{y}(t)} \\ Q(0) = 0\,, \qquad I(0) = 30\,. \end{cases}$$

Les valeurs propres de $A$ sont $\beta_1 \approx 29$ et $\beta_2 \approx 1$.

Les méthodes de Crank-Nicolson (à gauche) et d'Euler rétrograde (à droite) pour $h = 1/4$ ($h\beta = 7.5$) ;




Notez l'oscillation de Crank-Nicolson. (Explication : voir syllabus).

# Méthode de Heun

On obtient la méthode de *Heun* (ou de *Runge-Kutta* d'ordre 2) en rendant la méthode de Crank-Nicolson explicite sur base de la formule d'Euler progressive $y_{k+1} = y_k + h_k f(t_k, y_k)$

$$CN : y_{k+1} = y_k + \frac{1}{2} h_k \Big( f(t_k, y_k) + f(t_{k+1}, \underbrace{y_{k+1}}_{EP : y_k + h_k f(t_k, y_k)}) \Big),$$

ce qui revient à

$$\boxed{y_{k+1} = y_k + \frac{1}{2} h_k \Big( f(t_k, y_k) + f(t_{k+1}, y_k + h_k f(t_k, y_k)) \Big)}.$$

Notons que la méthode est :

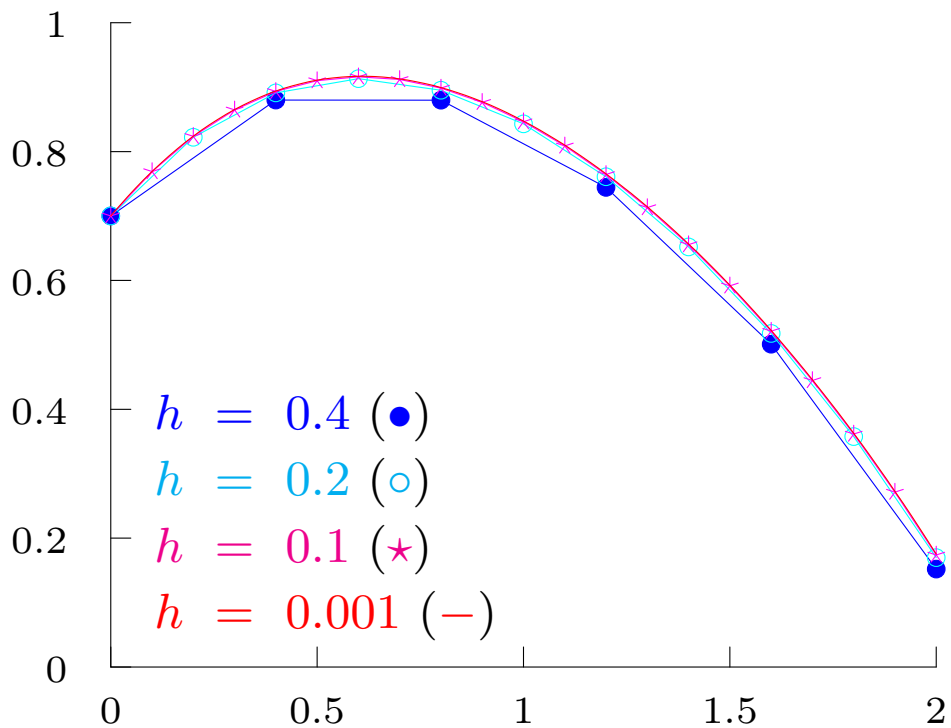
- explicite (par construction)
- du second ordre
- (notations de pp.16-17) stable si $h\beta < 2$ (tout comme Euler progressive)

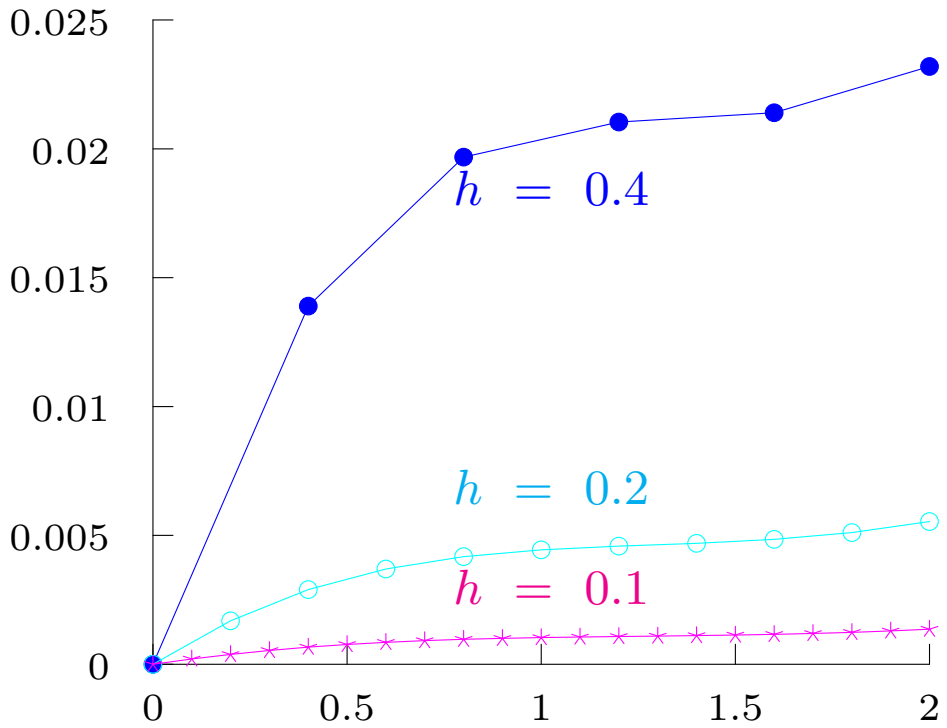
# Heun : ordre

**Exemple (suite) :** Reprenons le problème de Cauchy

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt}(t) = \cos(y) - t\,, & t \geq 0\,, \\ y(0) = 0.7\,, \end{cases}$$

et résolvons-le par la méthode de Heun. La figure de gauche donne les solutions approchées pour $h = 0.4\,, 0.2\,, 0.1$ et $0.001$ ; celle de droite contient l'estimation de l'erreur $|y_k - y(t_k)|$ (la solution approchée pour $h = 0.001$ fait office de solution exacte $y(t)$) .

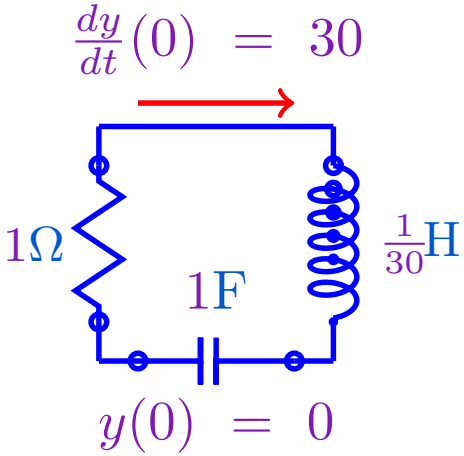



**Observation :** $|y_k - y(t_k)| \propto h^2$ et la méthode est en effet d'ordre 2.

# Heun : stabilité

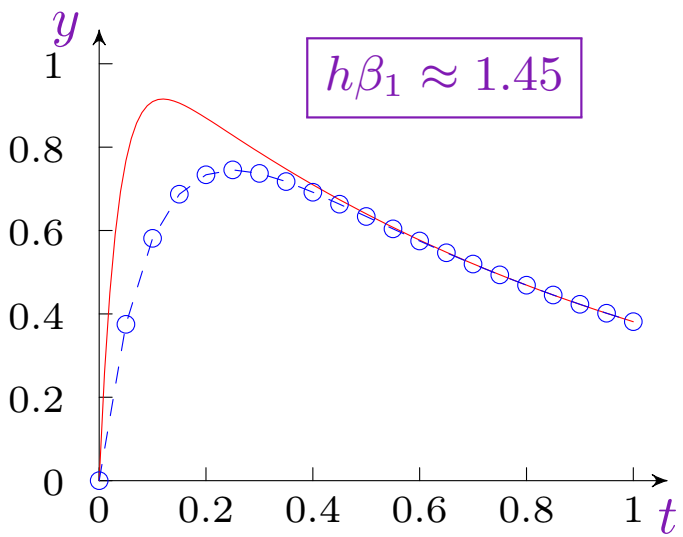
**Exemple** (Exemple 3 de la Motivation) : Circuit RLC



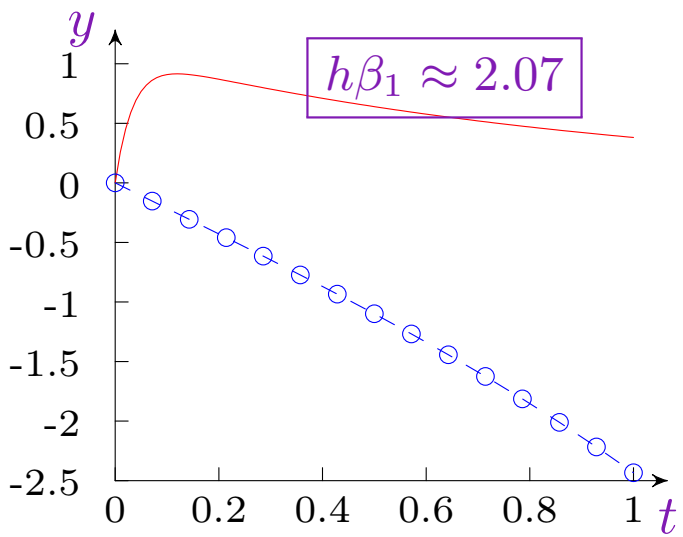

$$\begin{cases} \underbrace{\dfrac{d}{dt}\begin{pmatrix} I \\ Q \end{pmatrix}}_{\frac{d\mathbf{y}}{dt}(t)} = \underbrace{\begin{pmatrix} -30 & -30 \\ 1 & \end{pmatrix}}_{-A} \underbrace{\begin{pmatrix} I \\ Q \end{pmatrix}}_{\mathbf{y}(t)} \\ Q(0) = 0\,, \qquad I(0) = 30\,. \end{cases}$$

Les valeurs propres de $A$ sont $\beta_1 \approx 29$ et $\beta_2 \approx 1$.

La méthode de Heun donne :




$h = 1/20$ (∘) ; sol. exacte (−) ;



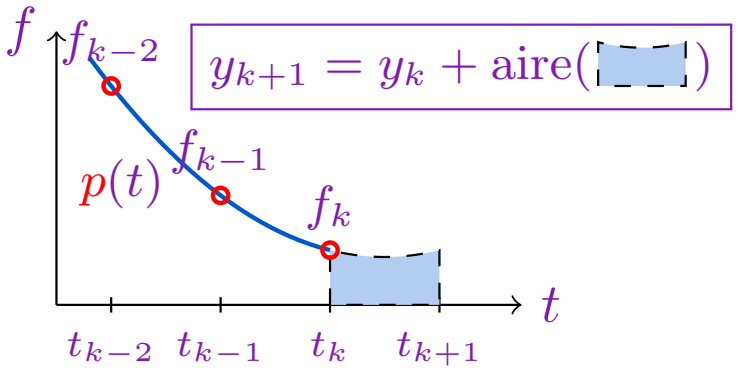

$h = 1/14$ (∘) ; sol. exacte (−) ;

# Méthodes multi-pas

Les méthodes d'Euler, de Crank-Nicolson et de Heun ont en commun le fait qu'elles ne relient que $y_{k+1}$ et $y_k$ ; une méthode *multi-pas* à $q+1$ pas permet de relier $y_{k+1}$ à $y_k$, $y_{k-1}$, …, $y_{k-q}$ .

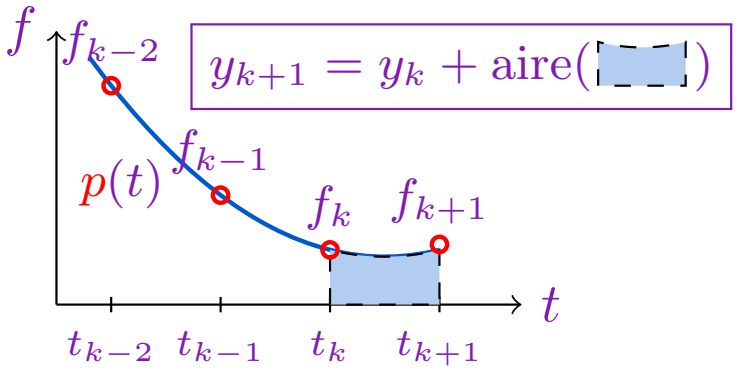
## Méthodes d'Adams-Bashforth :

consistent à approcher $f(t, y(t))$ par un polynôme d'interpolation $p(t)$ passant par $f(y_k, t_k)$, $f(y_{k-1}, t_{k-1})$, …, $f(y_{k-q}, t_{k-q})$ .



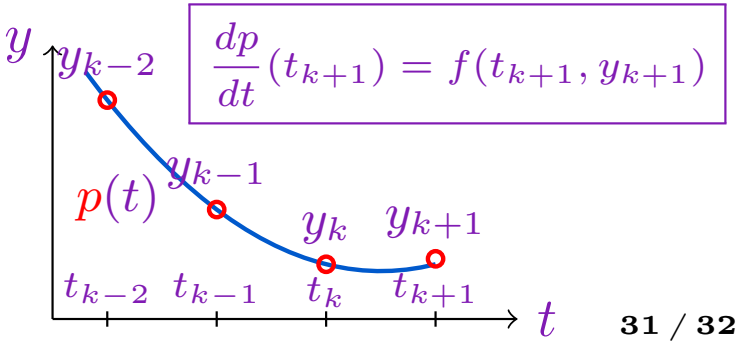

## Méthodes d'Adams-Moulton :

consistent à approcher $f(t, y(t))$ par un polynôme d'interpolation $p(t)$ passant par $f(y_{k+1}, t_{k+1})$, $f(y_k, t_k)$, …, $f(y_{k-q}, t_{k-q})$ .




## Méthodes BDF :

consistent à approcher $y(t)$ par un polynôme d'interpolation $p(t)$ passant par $y_{k+1}$, $y_k$, …, $y_{k-q}$ .

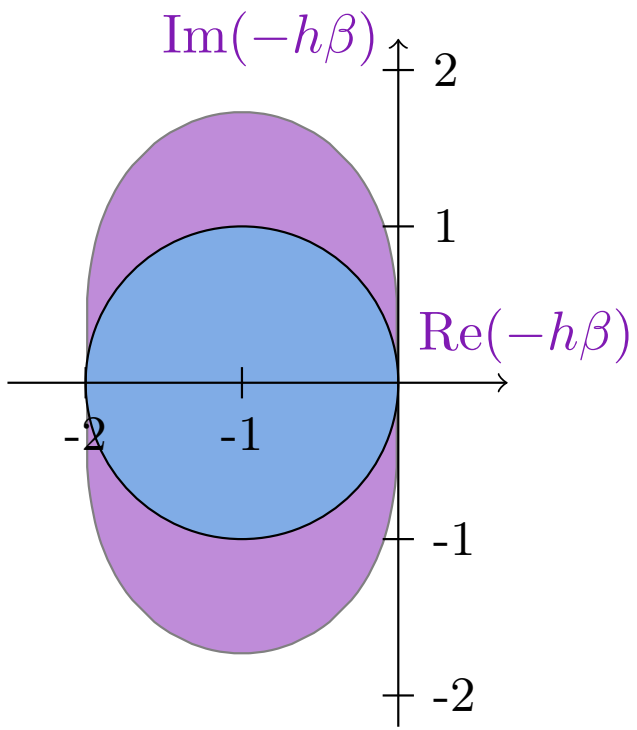


# Annexe : régions de stabilité

La *région de stabilité* pour une méthode est définie par

$$\{-h\beta \in \mathbb{C} \mid h\beta \text{ satisfait la condition de stabilité de la méthode } \}$$

Régions de stabilité des méthodes d'Euler progressive et de Heun :




Les régions de stabilité des méthodes d'Euler rétrograde et de Crank-Nicolson comprennent quant à elles l'ensemble du demi-plan gauche.