

Chapitre 7 : INTÉGRATION NUMÉRIQUE

- 1 Intégration numérique des fonctions d'une variable
 - Généralités
 - Formule des trapèzes
 - Formule de Simpson
 - Formules de Newton-Cotes
 - Dépendance de l'erreur en h : exemples
 - Méthode de Romberg
- 2 Intégration numérique des fonctions de plusieurs variables

GÉNÉRALITÉS (FONCTIONS D'UNE VARIABLE)

PROBLÈME

L'intégration numérique d'une fonction intégrable f d'une variable sur l'intervalle $[a, b]$ consiste à déterminer une approximation numérique de

$$\int_a^b f(x)dx .$$

La tâche est souvent divisée en deux parties :

- 1 Subdiviser l'intervalle d'intégration $[a, b]$ en sous-intervalles $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 1, \dots, m-1$ avec

$$a = x_1 < x_2 < \dots < x_m = b ,$$

et réduire l'intégrale sur $[a, b]$ à une somme d'intégrales sur $[x_i, x_{i+1}]$

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{m-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx .$$

- 2 Evaluer les intégrales dans la somme séparément, en remplaçant la fonction $f(x)$ par une approximation facile à intégrer. Cette dernière résulte souvent d'une interpolation polynomiale (cf. chapitre précédent).

FORMULE DES TRAPÈZES

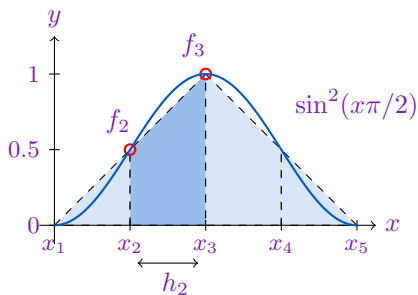
La *formule des trapèzes* s'obtient en approchant f sur chaque sous-intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ par une interpolation linéaire aux abscisses x_i et x_{i+1} ; on a donc, en notant $f_k = f(x_k)$, $k = i, i+1$, et $h_i = x_{i+1} - x_i$,

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx \approx \frac{h_i}{2} (f_i + f_{i+1}).$$

Cette formule est exacte pour tout polynôme de degré au plus 1.

Pour une intégrale sur l'entièreté de l'intervalle $[a, b]$ la formule des trapèzes correspond, pour les sous-intervalles $h_i = h$, $i = 1, \dots, m-1$, de même taille, à

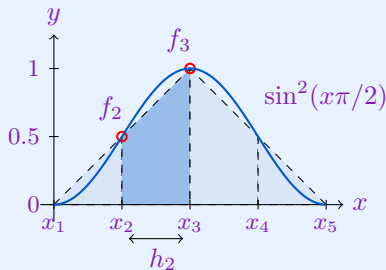
$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=1}^{m-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx \approx \frac{h}{2} (f_1 + 2f_2 + \dots + 2f_{m-1} + f_m).$$



FORMULE DES TRAPÈZES (SUITE)

La *formule des trapèzes* s'obtient en approchant f sur chaque sous-intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ par une interpolation linéaire aux abscisses x_i et x_{i+1} ; on a donc, en notant $f_k = f(x_k)$, $k = i, i+1$, et $h_i = x_{i+1} - x_i$,

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx = \frac{h_i}{2} (f_i + f_{i+1}) + E_{\text{loc}}(h_i).$$



ERREUR LOCALE : si $f \in C^2$, alors il existe un $c \in]x_i, x_{i+1}[$ tel que

$$E_{\text{loc}}(h_i) = -\frac{1}{12} h_i^3 f''(c).$$

JUSTIFICATION INFORMELLE : en utilisant le développement de Taylor on a

$$f(x) = f(x_i) + f'(x_i)(x - x_i) + \frac{1}{2} f''(x_i)(x - x_i)^2 + \dots$$

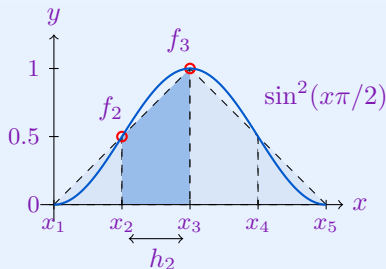
et donc

$$\begin{aligned} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx &= f(x_i) h_i + \frac{1}{2} f'(x_i) h_i^2 + \frac{1}{6} f''(x_i) h_i^3 + \dots \\ + f(x_{i+1}) &= f(x_i) + f'(x_i) h_i + \frac{1}{2} f''(x_i) h_i^2 + \dots \quad \times -\frac{1}{2} h_i \\ \hline \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx - \frac{1}{2} f(x_{i+1}) h_i &= \frac{1}{2} f(x_i) h_i - \frac{1}{12} f''(x_i) h_i^3 + \dots \end{aligned}$$

FORMULE DES TRAPÈZES (SUITE)

La *formule des trapèzes* s'obtient en approchant f sur chaque sous-intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ par une interpolation linéaire aux abscisses x_i et x_{i+1} ; on a donc, en notant $f_k = f(x_k)$, $k = i, i+1$, et $h_i = x_{i+1} - x_i$,

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx = \frac{h_i}{2} (f_i + f_{i+1}) + E_{\text{loc}}(h_i).$$



ERREUR GLOBALE : (sans démonstration)

Pour une intégrale sur l'entièreté de l'intervalle $[a, b]$ la formule des trapèzes correspond, pour les sous-intervalles $h_i = h$, $i = 1, \dots, m-1$, de même taille, à

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{h}{2} (f_1 + 2f_2 + \dots + 2f_{m-1} + f_m) + E_{\text{glob}}(h),$$

avec $E_{\text{glob}}(h)$ étant l'erreur globale d'intégration.

Pour $f \in C^2$ il existe un $c \in]a, b[$ tel que

$$E_{\text{glob}}(h) = -\frac{1}{12} (b-a) h^2 f''(c).$$

FORMULE DE SIMPSON

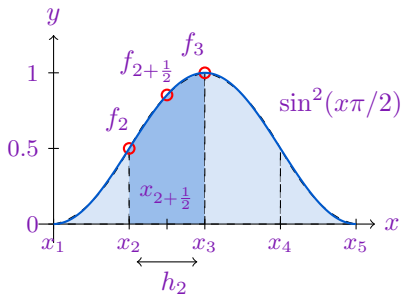
La *formule de Simpson* s'obtient en approchant f sur chaque sous-intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ par une interpolation quadratique aux abscisses x_i , $x_{i+1/2} = (x_i + x_{i+1})/2$ et x_{i+1} ; on a donc, en notant $f_k = f(x_k)$ pour $k = i, i+1/2, i+1$, et avec $h_i = x_{i+1} - x_i$,

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx \approx \frac{h_i}{6} (f_i + 4f_{i+1/2} + f_{i+1}).$$

Cette formule est exacte pour tout polynôme de degré au plus 3.¹

Pour une intégrale sur l'entièreté de l'intervalle $[a, b]$ la formule de Simpson correspond, pour les sous-intervalles $h_i = h$, $i = 1, \dots, m-1$, de même taille, à

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=1}^{m-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx \approx \frac{h}{6} \left(f_1 + 2 \sum_{i=2}^{m-1} f_i + 4 \sum_{i=1}^{m-1} f_{i+1/2} + f_m \right).$$



1. et pas 2, comme on pourrait s'attendre avec une interpolation quadratique.

FORMULES DE NEWTON-COTES

Les formules des trapèzes et de Simpson sont des cas particuliers des formules de Newton-Cotes. Ces dernières sont obtenues en approchant f sur chaque sous-intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ par un polynôme d'interpolation de degré n , ce qui donne

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx \approx h_i (w_1 f_i + w_2 f_{i+1/n} + \cdots + w_n f_{i+(n-1)/n} + w_{n+1} f_{i+1}).$$

Les valeurs de w_i pour les degrés $n \leq 4$ sont :

n	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	deg. exact pol.	$E_{\text{loc}}(h)$	$E_{\text{glob}}(h)$
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$				1	$\sim f'' h^3$	$\sim (b-a) f'' h^2$
2	$\frac{1}{6}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{1}{6}$			3	$\sim f^{(4)} h^5$	$\sim (b-a) f^{(4)} h^4$
3	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$		3	$\sim f^{(4)} h^5$	$\sim (b-a) f^{(4)} h^4$
4	$\frac{7}{90}$	$\frac{32}{90}$	$\frac{12}{90}$	$\frac{32}{90}$	$\frac{7}{90}$	5	$\sim f^{(6)} h^7$	$\sim (b-a) f^{(6)} h^6$

Les grandes valeurs de n , tout comme pour l'interpolation, peuvent mener aux erreurs numériques potentiellement importantes.

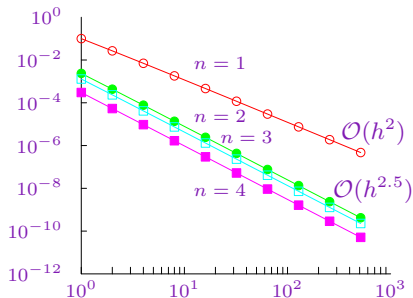
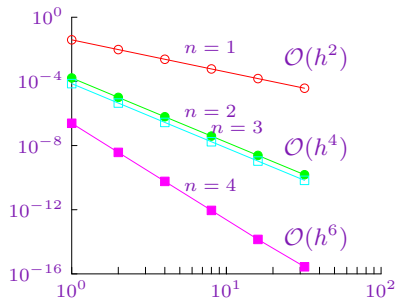
DÉPENDANCE DE L'ERREUR EN h : EXEMPLES

EXEMPLE : les figures suivantes donnent la différence entre la valeur exacte et l'approximation numérique (obtenue avec les formules de Newton-Cotes pour $n = 1, \dots, 4$) pour les intégrales suivantes :

$$\int_0^1 \sin(x) dx ,$$

$$\int_0^1 x^{3/2} dx ,$$

en fonction du nombre $m - 1 = 2^k$, $0 \leq k \leq 9$, de sous-intervalles utilisés.



CONCLUSION : L'estimation de l'erreur dépend aussi de la régularité de la fonction à intégrer ($\sin(x) \in C^\infty$ alors que $x^{3/2} \in C^1([0, 1])$).

MÉTHODE DE ROMBERG

On peut montrer (Quarteroni & al., Propriété 8.3) que pour une fonction $f \in C^{2n+2}$ la méthode de trapèzes produit une approximation $I_1(h)$ qui satisfait

$$I_1(h) = \int_a^b f(x)dx + C_1 h^2 + C_2 h^4 + \cdots + C_k h^{2n} + o(h^{2n}),$$

et donc, en particulier,

$$I_1(2h) = \int_a^b f(x)dx + C_1 4h^2 + C_2 4^2 h^4 + \cdots + C_k 4^k h^{2n} + o(h^{2n}).$$

Dès lors

$$I_2(h) = \frac{4I_1(h) - I_1(2h)}{3} = \int_a^b f(x)dx - \frac{12}{3}C_2 h^4 - \cdots - \frac{4^k - 4}{3}C_k h^{2n} + o(h^{2n}).$$

L'erreur globale de la nouvelle approximation $I_2(h)$ est $\mathcal{O}(h^4)$. De plus, la procédure peut être appliquée de nouveau à $I_2(h)$ pour former $I_3(h)$, et ainsi de suite.

MÉTHODE DE ROMBERG (SUITE)

SCHÉMA :

$i \backslash j$	1	2	...	$n-1$	n
1	$I_1(h)$	$\longrightarrow I_2(h)$	...	$I_{n-1}(h)$	$\longrightarrow I_n(h)$
2	$I_1(2h)$	$\nearrow I_2(2h)$	...	$I_{n-1}(2h)$	$\nearrow$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$			
$n-1$	$I_1(2^{n-1}h)$	$\longrightarrow I_2(2^{n-1}h)$			
n	$I_1(2^n h)$	$\nearrow$			

Notant $I_{j,i} = I_j(2^{i-1}h)$ et prenant $h = (b-a)2^{1-n}$, cela donne :

ALGORITHME : (entrées : a, b, f, n sortie : $I_{n,1}$)

% $\text{trapezes}(a, b, f, k)$ - méthode de trapèzes pour f sur $[a, b]$ avec k intervalles

calculer $I_{1,i} = \text{trapezes}(a, b, f, 2^{n-i})$, $i = 1, \dots, n$

pour $j = 1, \dots, n-1$

pour $i = 1, \dots, n-j$

$$I_{j+1,i} = (4^j I_{j,i} - I_{j,i+1}) / (4^j - 1)$$

INTÉGRATION DES FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES

Pour intégrer les fonctions $f(x, y)$ de deux variables et plus, on peut :

- recycler les formules à une variable (grâce au théorème de Fubini)
- recycler les idées présentées, tout en les appliquant au cas multidimensionnel
 - ▶ la généralisation de la méthode des trapèzes à deux dimensions consiste à approcher le domaine d'intégration par une union de triangles T et d'interpoler la fonction sur chaque triangle par un plan ; pour chaque T cela donne
$$\iint_T f(x, y) \approx \frac{1}{3} \text{aire}(T)(f_1 + f_2 + f_3),$$
où f_1, f_2, f_3 sont les valeurs de f aux sommets de T .
- utiliser des nouvelles approches
 - ▶ les méthodes Monte-Carlo évaluent la fonction aux points aléatoires et multiplient la moyenne résultante par l'aire du domaine d'intégration ; elles sont efficaces pour intégrer des fonctions à variables multiples (de l'ordre de 6 et plus)

