

Chapitre 6 : INTERPOLATION ET APPROXIMATION

- 1 Interpolation et approximation : généralités
- 2 Matrice de Vandermonde
- 3 Polynômes de Lagrange
- 4 Conditionnement
- 5 Interpolation polynomiale par morceaux
- 6 Interpolation par splines

GÉNÉRALITÉS

DEUX PROBLÈMES SIMILAIRES

Soient des abscisses x_i distinctes et des ordonnées y_i correspondantes, $i = 1, \dots, m$. Le problème d'*interpolation* consiste à déterminer une fonction f , appelée *fonction d'interpolation*, telle que

$$f(x_i) = y_i, \quad i = 1, \dots, m.$$

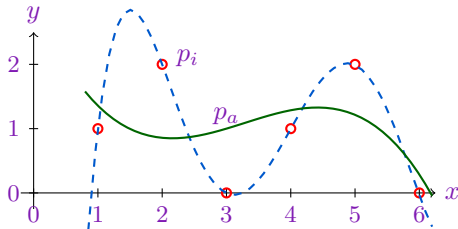
Le problème d'*approximation* au sens des moindres carrés consiste à déterminer une fonction f qui minimise

$$\sum_{i=1}^m (f(x_i) - y_i)^2.$$

Le choix de f est souvent restreint à une classe donnée de fonctions.

EXEMPLE

Les points $(1, 1)$, $(2, 2)$, $(3, 0)$, $(4, 1)$, $(5, 2)$ et $(6, 0)$ peuvent être interpolés par un polynôme p_i de degré 5 et approchés (au sens des moindres carrés) par un polynôme p_a de degré 3.



MATRICE DE VANDERMONDE

On veut déterminer un polynôme

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n-1} c_i x^i = c_0 + c_1 x + \cdots + c_{n-1} x^{n-1},$$

de degré au plus $n-1$ passant par les points (x_i, y_i) , $i = 1, \dots, m$. Les coefficients c_i , $i = 0, \dots, n-1$, de ce polynôme doivent satisfaire

$$\begin{cases} c_0 + c_1 x_1 + \cdots + c_{n-1} x_1^{n-1} & = y_1 \\ c_0 + c_1 x_2 + \cdots + c_{n-1} x_2^{n-1} & = y_2 \\ \vdots & \vdots \\ c_0 + c_1 x_m + \cdots + c_{n-1} x_m^{n-1} & = y_m \end{cases}$$

ou encore (sous forme matricielle)

$$V \mathbf{c} = \mathbf{y},$$

avec

$$V = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_m & \cdots & x_m^{n-1} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{n-1} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}.$$

La matrice V est appelée *matrice de Vandermonde*.

MATRICE DE VANDERMONDE (SUITE)

Les coefficients c_i d'un polynôme

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n-1} c_i x^i = c_0 + c_1 x + \cdots + c_{n-1} x^{n-1},$$

de degré au plus $n-1$ qui passe par (x_i, y_i) , $i = 1, \dots, m$, doivent satisfaire

$$\begin{array}{l} p(x_1) = y_1 \rightarrow \\ p(x_2) = y_2 \rightarrow \\ \vdots \\ p(x_m) = y_m \rightarrow \end{array} \begin{pmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_m & \cdots & x_m^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}. \quad (1)$$

- Si $m = n$ et comme les abscisses x_i sont **toutes distinctes**, la matrice de Vandermonde est régulière et il existe un et un seul polynôme dont les coefficients c_i , $i = 0, \dots, n-1$, satisfont le système (1).
- Si $m > n$, il n'existe pas nécessairement de polynôme de degré au plus $n-1$ qui passe par tous les m points. En résolvant le système (1) (qui est alors surdéterminé) au sens des moindres carrés on détermine un polynôme $p(x)$ qui minimise

$$\|V\mathbf{c} - \mathbf{y}\|_2^2 = \sum_{i=1}^m (p(x_i) - y_i)^2.$$

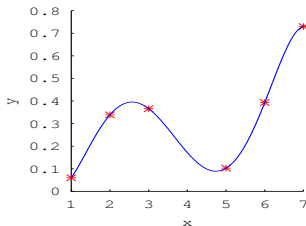
MATRICE DE VANDERMONDE (SUITE)

EXEMPLE : (Exemple 2 de la Motivation)

Pour $x=[1;2;3;5;6;7]$ et $y=\text{rand}(6,1)$ déterminer :

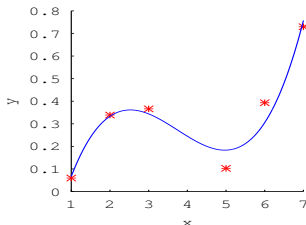
- un **polynôme d'interpolation** de degré 5

```
% matrice de Vandermonde
A = [x.^0 x.^1 x.^2 ...
      x.^3 x.^4 x.^5];
pol = A\y; % système régulier
% afficher le polynôme
xf = 1:0.01:7;
plot(xf, polyval(pol(end:-1:1),xf))
```



- un **polynôme d'approximation** (au sens des moindres carrés) de degré 3

```
% matrice de Vandermonde
A = [x.^0 x.^1 x.^2 x.^3];
pol = A\y; % système surdéterminé!
% afficher le polynôme
xf = 1:0.01:7;
plot(xf, polyval(pol(end:-1:1),xf))
```



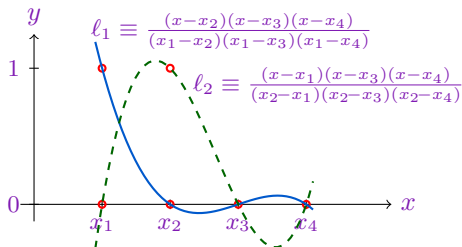
POLYNÔMES DE LAGRANGE

Le k ème *polynôme de Lagrange* pour les abscisses $x_i, i = 1, \dots, m$, est défini par

$$\ell_k(x) = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^m \frac{x - x_i}{x_k - x_i}.$$

Ce polynôme vaut 1 si $x = x_k$ et 0 si $x = x_i, i \neq k$; en d'autres termes

$$\ell_k(x_i) = \delta_{ki}.$$



Une autre manière de déterminer le polynôme d'interpolation (cas $m = n$) est donc d'utiliser les polynômes de Lagrange :

$$p(x) = y_1 \ell_1(x) + y_2 \ell_2(x) + \dots + y_m \ell_m(x).$$

Comme chacun des polynômes $\ell_k(x)$ est de degré $m - 1$, le polynôme d'interpolation $p(x)$ est de degré au plus $m - 1$.

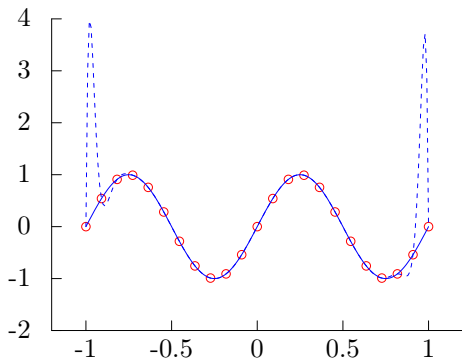
CONDITIONNEMENT

Le conditionnement du problème d'interpolation par un polynôme aux abscisses x_i équidistantes se dégrade sensiblement avec le nombre m de points.

EXEMPLE (QUARTERONI AND AL.)

Les polynômes d'interpolation calculés pour les abscisses équidistantes :

- (a) $(x_i, \sin(2\pi x_i))$
- (b) $(x_i, \sin(2\pi x_i) + \delta_i)$ avec $\delta_i = \pm 10^{-4}$



Deux options sont envisageables (et nous n'explorerons que la deuxième) :

- utiliser les abscisses x_i avec un **espacement adapté** (par opposition aux x_i équidistantes)
- **limiter le degré** des polynômes utilisés

INTERPOLATION POLYNOMIALE PAR MORCEAUX

Pour $x_1 < x_2 < \dots < x_m$ on subdivise l'intervalle $]x_1, x_m[$ en sous-intervalles contigus et disjoints. On peut alors interpoler sur chaque sous-intervalle séparément.

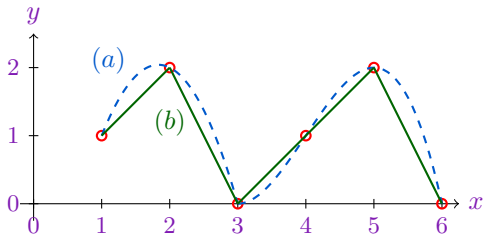
- La fonction d'interpolation est polynomiale par morceaux (elle est polynomiale sur chaque sous-intervalle).
- On choisit les sous-intervalles qui ont comme extrémités x_i pour avoir une **fonction d'interpolation continue**.
- La **dérivée** de la fonction d'interpolation est généralement **discontinue** aux extrémités des sous-intervalles.
- Le nombre de points x_i par sous-intervalle est limité pour des raisons de stabilité mentionnées auparavant.

EXEMPLE DE LA P.2 (SUITE)

Deux des choix possibles de sous-intervalles :

(a) $]1, 3[$ et $]3, 6[$ (trait interrompu)

(b) $]1, 2[,]2, 3[,]3, 4[,]4, 5[$ et $]5, 6[$
(trait continu)



INTERPOLATION PAR SPLINES

Interpolation polynomiale par morceaux mène à une fonction d'interpolation continue (dans C^0) mais qui n'est pas à dérivée continue (pas dans C^1). Pour avoir une fonction suffisamment régulière on utilise des splines.

Pour $x_1 < x_2 < \dots < x_m$, on définit *une spline de degré k* comme une fonction qui

- est un polynôme de degré au plus k sur $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 1, \dots, m - 1$ (et donc polynomiale par morceaux);
- appartient à C^{k-1} .

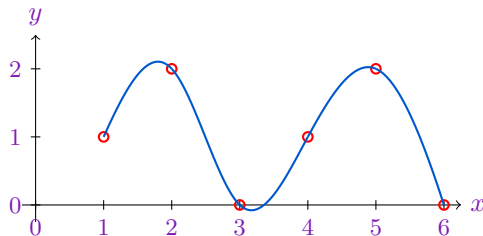
On ne détaille ici que l'interpolation par *splines cubiques*, qui sont donc :

- des *polynômes de degré au plus 3* par morceaux;
- *continues* et avec les *deux premières dérivées continues*.

EXEMPLE DE LA P.2 (SUITE)

Interpolation par splines cubiques;

(la construction de la fonction d'interpolation est expliquée dans les pages suivantes).



INTERPOLATION PAR SPLINES : DÉRIVATION

La fonction d'interpolation sur l'intervalle $]x_i, x_{i+1}[$ correspond à un polynôme de degré au plus 3, et donc sa dérivée seconde est linéaire. Comme cette dernière doit être continue, on a

$$f''(x) = \alpha_i \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i} + \alpha_{i+1} \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} \quad \text{sur }]x_i, x_{i+1}[,$$

où $\alpha_i, i = 1, \dots, m$, sont des constantes à déterminer (notez que $f''(x_i) = \alpha_i$). Avec $h_i = x_{i+1} - x_i$ on a donc

$$f(x) = \alpha_i \frac{(x_{i+1} - x)^3}{6h_i} + \alpha_{i+1} \frac{(x - x_i)^3}{6h_i} + \beta_i(x - x_i) + \gamma_i .$$

Les valeurs de β_i et γ_i s'obtiennent à travers les valeurs de f en x_i et x_{i+1} :

$$f(x_i) = y_i \quad \Rightarrow \quad \gamma_i = y_i - \alpha_i \frac{h_i^2}{6}$$

$$f(x_{i+1}) = y_{i+1} \quad \Rightarrow \quad \beta_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - (\alpha_{i+1} - \alpha_i) \frac{h_i}{6}$$

Finalement, la continuité de la dérivée première signifie (pour $i > 1$) :

$$\underbrace{-\alpha_i \frac{h_i}{2} + \beta_i}_{\text{approximation sur }]x_i, x_{i+1}[} = \underbrace{\alpha_i \frac{h_{i-1}}{2} + \beta_{i-1}}_{\text{approximation sur }]x_{i-1}, x_i[} .$$

INTERPOLATION PAR SPLINES : DÉRIVATION (SUITE)

En substituant les valeurs de β_i dans la dernière égalité on a

$$-\alpha_i \frac{h_i}{3} - \alpha_{i+1} \frac{h_i}{6} + \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} = \alpha_i \frac{h_{i-1}}{3} + \alpha_{i-1} \frac{h_{i-1}}{6} + \frac{y_i - y_{i-1}}{h_{i-1}}.$$

Après un regroupement des termes en α et une multiplication par $6/(h_{i-1} + h_i)$ on obtient $m - 2$ équations linéaires

$$\frac{h_{i-1}}{h_{i-1} + h_i} \alpha_{i-1} + 2\alpha_i + \frac{h_i}{h_{i-1} + h_i} \alpha_{i+1} = \frac{6}{h_{i-1} + h_i} \left(\frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_{i-1}} \right),$$

avec $i = 2, \dots, m - 1$. Il reste à imposer deux équations supplémentaires pour avoir un système régulier. Les **splines naturelles** sont obtenues si on impose $f''(x_1) = \alpha_1 = 0$ et $f''(x_m) = \alpha_m = 0$.