Chapitre 5 : Equations et systèmes d'équations non linéaires

Généralités

Problème :

On entend par *équation non linéaire* d'une variable réelle l'égalité

$$f(x) = 0,$$

où $f(x) : [x_{\min}, x_{\max}] \subset \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$. Dans ce qui suit nous supposons que $f(x)$ est continue (dit autrement, $f(x) \in C^0$).

Note : Le terme *non linéaire* constitue un léger abus de langage car $f(x)$ peut également être une fonction linéaire.

Plus généralement, on entend par *système d'équations non linéaires* avec n équations et n inconnues (ou plus simplement *système non linéaire*) :

$$\begin{cases} f_1(x_1, \ldots, x_n) = 0 \\ f_2(x_1, \ldots, x_n) = 0 \\ \ldots \\ f_n(x_1, \ldots, x_n) = 0 \end{cases}$$

avec $f_i : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$, $i = 1, ..., n$, étant des fonctions continues.

Sous forme matricielle on a

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0},$$

$\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ étant une fonction continue.

Généralités (suite)

Pour une équation

$$f(x) \ = \ 0$$

ou un système d'équations

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) \ = \ \mathbf{0}$$

on cherche à déterminer une ou plusieurs *solutions* (appelés encore *zéros* ou *racines*) ; c'est-à-dire un ou plusieurs réels x (resp. vecteurs $\mathbf{x}$) qui satisfont $f(x) = 0$ (resp. $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$).

Cas particuliers :

- système d'équations linéaires : $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \ = \ A\mathbf{x} - \mathbf{b}$
  - il y a soit aucune, soit une, soit une infinité de solutions
- équations algébriques : $f(x) \ = \ \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$
  - si on accepte des racines x complexes, alors l'équation possède exactement n racines (comptant séparément les racines confondues)
  - si a_k, $k = 0, ..., n$, sont réels, alors les racines sont soit réelles, soit complexes conjuguées.

Notations :

- x, $\mathbf{x}$ - solution exacte
- x_k, $\mathbf{x}_k$ - solution approchée à l'itération k (exception : page 2)

Méthode de dichotomie

La méthode de *dichotomie* utilise le fait qu'une fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$ et qui change de signe à ses extrémités doit avoir (au moins) une solution à l'intérieur de cet intervalle ; en d'autres termes si $f \in C^0([a, b])$ et

$$f(a)f(b) < 0 ,$$

alors il y a une racine dans $]a, b[$.

Algorithme : (entrées : f, a, b, ε sortie : x_k)

% choisir a, b tels que $f(a)f(b) < 0$

répéter tant que $|a - b| > \varepsilon$

  $x_k := (a + b)/2$

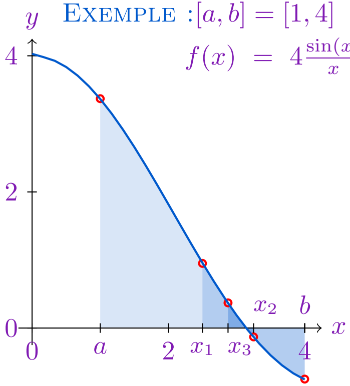
  si $f(a)f(x_k) < 0$ alors $b := x_k$

  si $f(b)f(x_k) < 0$ alors $a := x_k$

  si $f(x_k) = 0$ alors x_k est une racine

Exemple : $[a, b] = [1, 4]$

$$f(x) = 4\frac{\sin(x)}{x}$$



Méthode de la fausse position

La méthode de la *fausse position* est une modification de la méthode de dichotomie qui utilise les valeurs $f(a)$ et $f(b)$ de la fonction aux extrémités de l'intervalle pour calculer l'approximation suivante de la racine :

$$x_k = a - f(a)\frac{b-a}{f(b)-f(a)},$$

au lieu de $x_k = (a+b)/2$ pour dichotomie.

Algorithme : (entrées : f, a, b sortie : x_k)

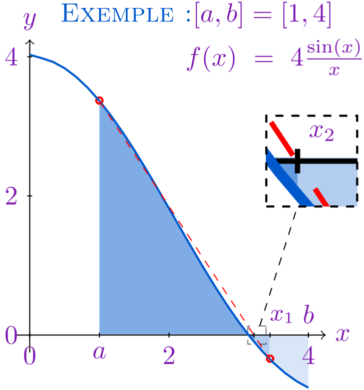
% choisir a, b tels que $f(a)f(b) < 0$

répéter jusqu'à l'arrêt

- $x_k := a - f(a)\frac{b-a}{f(b)-f(a)}$
- si $f(a)f(x_k) < 0$ alors $b := x_k$
- si $f(b)f(x_k) < 0$ alors $a := x_k$
- si $f(x_k) = 0$ alors x_k est une racine

Exemple : $[a,b] = [1,4]$

$f(x) = 4\frac{\sin(x)}{x}$



Méthode de Newton-Raphson

La méthode de *Newton* (ou Newton-Raphson) consiste à prendre pour x_{k+1} la racine du développement de Taylor de premier ordre autour de x_k ; cela revient, pour autant que $f'(x_k) \neq 0$, à déterminer x_{k+1} qui satisfait

$$f(x_k) + f'(x_k)(x_{k+1} - x_k) = 0,$$

et donc

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}. \tag{0}$$

Notons que la méthode requiert la dérivée f' de la fonction f.

Algorithme :
(entrées : f, f', x_0, sortie : x_{k+1})

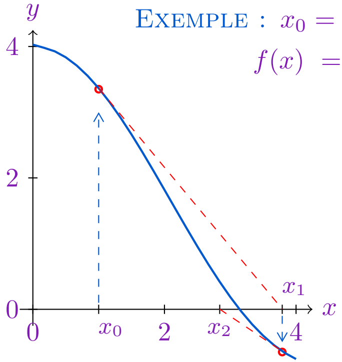
répéter jusqu'à l'arrêt

% pour autant que $f'(x_k) \neq 0$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}.$$

Exemple : $x_0 = 1$

$$f(x) = 4\frac{\sin(x)}{x}$$



Méthode de Newton-Raphson

La méthode de *Newton* (ou Newton-Raphson) consiste à prendre pour x_{k+1} la racine du développement de Taylor de premier ordre autour de x_k ; cela revient, pour autant que $f'(x_k) \neq 0$, à déterminer x_{k+1} qui satisfait

$$f(x_k) + f'(x_k)(x_{k+1} - x_k) = 0\,,$$

et donc

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}\,. \tag{0}$$

Notons que la méthode requiert la dérivée f' de la fonction f.

Algorithme :
(entrées : f, f', x_0, sortie : x_{k+1})

répéter jusqu'à l'arrêt

% pour autant que $f'(x_k) \neq 0$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}\,.$$

k	x_k	$\lvert x_k - x\rvert$
0	1	2.1
1	3.7	$6.5\ 10^{-1}$
2	2.8	$3.0\ 10^{-1}$
3	3.12	$2.2\ 10^{-2}$
4	3.1414	$1.4\ 10^{-4}$
5	3.14159264	$6.6\ 10^{-9}$

(convergence quadratique !)

Méthode de Newton-Raphson (suite)

La méthode de Newton pour une équation $f(x) = 0$ avec f dérivable revient donc (si $f'(x_k) \neq 0$) à

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} . \qquad (0)$$

Vocabulaire. De manière générale, la convergence d'une suite x_k , $k = 0, 1 \dots$, vers x est d'ordre p s'il existe une constante C telle que

$$\left|x - x_{k+1}\right| \leq C\left|x - x_k\right|^p .$$

- Si $p = 1$ et $C < 1$ on parle d'une *convergence linéaire*.
- Si $p = 2$ on parle d'une *convergence quadratique*.
- On parle d'une *convergence superlinéaire* si

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|x - x_{k+1}|}{|x - x_k|} = 0 .$$

Méthode de Newton-Raphson (suite)

La méthode de Newton pour une équation $f(x) = 0$ avec f dérivable revient donc (si $f'(x_k) \neq 0$) à

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} . \tag{0}$$

Théorème 1. *Soit x une racine d'une fonction $f \in C^2$ telle que $f'(x) \neq 0$. Alors il existe un intervalle $V(x)$ fermé et centré en x tel que $x_k \in V(x)$ implique*

$$\left|x - x_{k+1}\right| \leq C\left|x - x_k\right|^2 .$$

Démonstration. Le développement de Taylor avec le reste de Lagrange (évalué en $c \in [x, x_k]$) est :

$$\underbrace{f(x)}_{=0 \text{ (car racine)}} = \underbrace{f(x_k) + f'(x_k)(x - x_k)}_{f'(x_k)(x - x_{k+1}) \text{ (par (0))}} + \frac{1}{2} f''(c)(x - x_k)^2$$

et donc

$$|x - x_{k+1}| = \left|\frac{f''(c)}{2f'(x_k)}(x - x_k)^2\right| \leq \underbrace{\max_{V(x)} \left|\frac{f''(c)}{2f'(x_k)}\right|}_{C} \left|x - x_k\right|^2 .$$

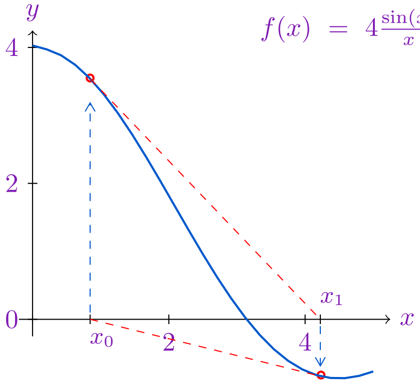
Méthode de Newton-Raphson (suite)

La méthode de Newton pour une équation $f(x) = 0$ avec f dérivable revient donc (si $f'(x_k) \neq 0$) à

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}\,. \tag{0}$$

Exemple : $x_0 \approx 0.845$

$f(x) = 4\frac{\sin(x)}{x}$



(comportement cyclique)

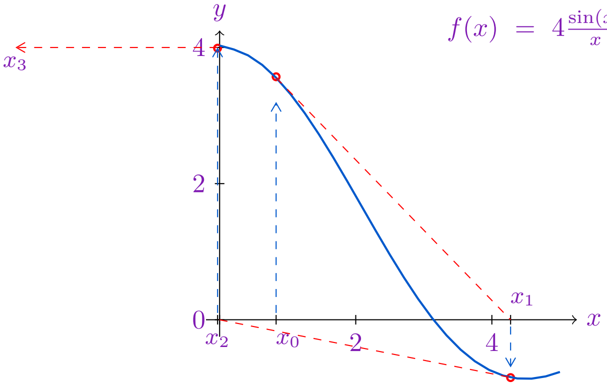
Méthode de Newton-Raphson (suite)

La méthode de Newton pour une équation $f(x) = 0$ avec f dérivable revient donc (si $f'(x_k) \neq 0$) à

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}. \tag{0}$$

Exemple : $x_0 = 0.83$

$f(x) = 4\frac{\sin(x)}{x}$



(divergence)

Newton-Raphson avec recherche linéaire

Plusieurs approches combinent la convergence superlinéaire locale (comme celle de Newton) avec des propriétés de convergence globale. Une telle méthode s'obtient en multipliant l'incrément dans la méthode de Newton avec un facteur d'amortissement $\alpha_k > 0$:

$$x_{k+1} = x_k - \alpha_k \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} . \tag{1}$$

Le facteur α_k est choisi de manière à satisfaire (parfois avec une marge)

$$|f(x_{k+1})| < |f(x_k)|$$

et d'éviter ainsi une divergence et/ou un comportement cyclique.

Théorème 2. Si $f \in C^1$, $f'(x_k) \neq 0$ et $f(x_k) \neq 0$, alors un tel $\alpha_k > 0$ existe.

Démonstration. Par dévelop. de Taylor et (1) on a, pour un $c \in]x_k, x_{k+1}[$,

$$f(x_{k+1}) = f(x_k) + f'(c) \underbrace{(x_{k+1} - x_k)}_{-\alpha_k f(x_k)/f'(x_k)} = f(x_k)\left(1 - \alpha_k \frac{f'(c)}{f'(x_k)}\right) ,$$

Dès lors, le résultat suit si $|1 - \alpha_k f'(c)/f'(x_k)| < 1$. Or, pour α_k suffisamment petit on a (car $f' \in C^0$, $f'(x_k) \neq 0$)

$$C > f'(c)/f'(x_k) > 0 \quad \text{pour tout} \quad c \in [x_k \ , \ x_{k+1}] , \tag{2}$$

et donc on a $|1 - \alpha_k f'(c)/f'(x_k)| < 1$ en choisissant $\alpha_k < 2C^{-1}$ (c'est-à-dire un α_k suffisamment petit).

Newton-Raphson avec recherche linéaire (suite)

On modifie donc la méthode de Newton pour une équation $f(x) = 0$ (si $f'(x_k) \neq 0$) comme suit

$$x_{k+1} = x_k - \alpha_k \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \qquad (1)$$

en recherchant un facteur α_k qui satisfait

$$|f(x_{k+1})| < |f(x_k)|.$$

Algorithme (grandes lignes) :

répéter jusqu'à l'arrêt

% pour autant que $f'(x_k) \neq 0$

$p := \dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)}$

$\alpha_k = 1$

(a) répéter jusqu'à l'arrêt % recherche bon α_k

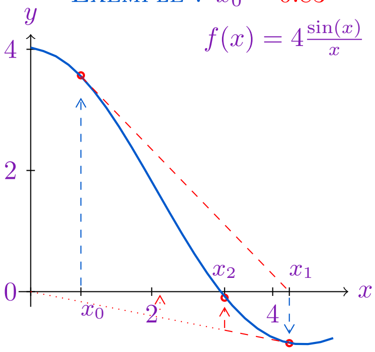
$x_{k+1} = x_k - \alpha_k p$

si $|f(x_{k+1})| < |f(x_k)|$

arrêter de répéter (a)

$\alpha_k := \alpha_k/2$

Exemple : $x_0 = 0.83$



Méthode de Newton : variantes

L'expression de $f'(x_k)$, requise par la méthode de Newton, n'est pas toujours connue ; on peut en obtenir une approximation sur base de la fonction f.

- Formule de différences finies : pour un h donné et «petit»

$$f'(x_k) \approx \frac{f(x_k + h) - f(x_k)}{h}$$

  (si h est trop «petit» , il y un risque d'erreur d'annulation) ;

- méthode de la sécante :

$$f'(x_k) \approx \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}} \ .$$

Généralisation aux systèmes non linéaires

Pour un système d'équations non linéaires

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$$

on notera qu'en tout généralité les méthodes d'encadrement ne s'appliquent plus. Par contre, les méthodes de type Newton (et les résultats correspondants) se généralisent aisément au cas de plusieurs équations non linéaires. Prenons l'exemple de Newton-Raphson ; l'itération se base alors sur

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - \mathbf{f}'(\mathbf{x}_k)^{-1}\mathbf{f}(\mathbf{x}_k)\,,$$

avec $\mathbf{f}'(\mathbf{x}) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{x})\right)$ la matrice Jacobienne.

Algorithme : (entrées : $\mathbf{f}$, $\mathbf{f}'$, $\mathbf{x}_0$, sortie : $\mathbf{x}_{k+1}$)

répéter jusqu'à l'arrêt

% pour autant que la matrice $\mathbf{f}'(\mathbf{x}_k)$ soit régulière

$A = \mathbf{f}'(\mathbf{x}_k)$ % évaluer $\mathbf{f}'(\mathbf{x}_k)$

$\mathbf{b} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_k)$ % évaluer $\mathbf{f}(\mathbf{x}_k)$

déterminer L, U et P tels que $LU = PA$ % factoriser A

résoudre $LU\mathbf{p} = P\mathbf{b}$ % résoudre $A\mathbf{p} = \mathbf{b}$

$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - \mathbf{p}$

Méthode de Newton-corde

Le coût de la factorisation LU pour les systèmes de taille importante peut devenir assez conséquent. Dans certains cas on peut remplacer la factorisation LU par une méthode itérative. Alternativement, on peut approcher $\mathbf{f}'(\mathbf{x}_k)$ par $\mathbf{f}'(\mathbf{x}_0)$, cette dernière matrice sera factorisée une seule fois ; cela revient à

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - \mathbf{f}'(\mathbf{x}_0)^{-1}\mathbf{f}(\mathbf{x}_k)$$

et correspond à la *méthode de la corde* (ou Newton-corde). Dans ce dernier cas la convergence n'est plus quadratique.

Algorithme : (entrées : $\mathbf{f}$, $\mathbf{f}'$, $\mathbf{x}_0$, sortie : $\mathbf{x}_{k+1}$)

% pour autant que la matrice $\mathbf{f}'(\mathbf{x}_0)$ soit régulière

$A = \mathbf{f}'(\mathbf{x}_0)$ % évaluer $\mathbf{f}'(\mathbf{x}_0)$

déterminer L, U et P tels que $LU = PA$ % factoriser A

factorisation une seule fois au début !

répéter jusqu'à l'arrêt

- $\mathbf{b} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_k)$ % évaluer $\mathbf{f}(\mathbf{x}_k)$
- résoudre $LU\mathbf{p} = P\mathbf{b}$ % résoudre $A\mathbf{p} = \mathbf{b}$
- $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - \mathbf{p}$

CRITÈRES D'ARRÊT

Les critères d'arrêt pour les équations et systèmes d'équations non linéaires sont similaires au cas linéaire.

On arrête la méthode si

- ⊕ la norme de la fonction à annuler $\mathbf{f}(\mathbf{x}_k)$ satisfait

$$\|\mathbf{f}(\mathbf{x}_k)\| \leq \varepsilon_a \,;$$

  alternativement, on peut utiliser la réduction de cette norme relativement à $\|\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)\|$:

$$\|\mathbf{f}(\mathbf{x}_k)\| \leq \varepsilon_r \|\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)\| \,;$$

  (attention, le facteur de normalisation dépend de $\mathbf{x}_0$!)
  ε_a, ε_r sont typiquement fournis par l'utilisateur ;

- ⊖ le nombre maximal d'itérations est dépassé ;

- ⊖ Pour les méthodes de type Newton, le fait que la dérivée $\mathbf{f}'(\mathbf{x}_k)$ ou son approximation soit non-inversible peut mener à l'arrêt de la méthode.