Chapitre 2 : Systèmes d'équations linéaires : méthodes directes

Systèmes linéaires : généralités

Problème

Soit un système d'équations linéaires (ou simplement un *système linéaire*) :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ & \cdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{cases}$$

avec les inconnues x_j, les coefficients du système a_{ij} et les seconds membres b_i, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$.

Système sous forme matricielle :

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}.$$

- systèmes *réguliers* : $m = n$ (A carré) et $\det(A) \neq 0$ (A inversible [1])
  $\Rightarrow$ (ce chapitre & celui sur les méthodes itératives)
- systèmes *surdéterminés* de rang maximal : $m \geq n = \mathrm{rang}(A)$
  $\Rightarrow$ résolution au sens des moindres carrés (chapitre correspondant)
- systèmes *sous-déterminés* ($m \leq n$) ou de rang non maximal
  $\Rightarrow$ ne seront pas vus

1. conditions équivalentes : A est inversible $\Leftrightarrow$ $\mathrm{rang}(A) = n$ $\Leftrightarrow$ le système $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ possède une et une seule solution.

Rappel sur les normes

Une norme dans un espace vectoriel réel $\mathbb{R}^n$ doit satisfaire :

- $\|\mathbf{v}\| > 0\,, \quad \forall\, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ tel que $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$
- $\|\lambda\mathbf{v}\| = |\lambda|\, \|\mathbf{v}\|\,, \quad \lambda \in \mathbb{R}\,, \quad \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$
- $\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\| \leq \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|\,, \quad \mathbf{v}\,, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$

Pour toute norme vectorielle $\|\cdot\|$ la norme matricielle induite pour une matrice $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ (c.à.d. une matrice $m \times n$) est

$$\|A\| = \max_{\mathbf{v}\in\mathbb{R}^n,\, \mathbf{v}\neq 0} \frac{\|A\mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|}\,;$$

on a en particulier

$$\|A\mathbf{v}\| \leq \|A\| \cdot \|\mathbf{v}\|\,.$$

Normes vectorielles :	Normes matricielles induites :	
$\|\mathbf{v}\|_1 = \sum_{i=1}^n \|v_i\|$	$\|A\|_1 = \max_{j=1,\dots,n} \sum_{i=1}^m \|a_{ij}\|$	norme 1
$\|\mathbf{v}\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n \|v_i\|^2\right)^{1/2}$	$\|A\|_2 = \left(\lambda_{\max}\left(A^T A\right)\right)^{1/2}$	norme euclidienne
$\|\mathbf{v}\|_\infty = \max_{i=1,\dots,n} \|v_i\|$	$\|A\|_\infty = \max_{i=1,\dots,m} \sum_{j=1}^n \|a_{ij}\|$	norme sup

Conditionnement d'un système linéaire

Soit un système linéaire

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}\,. \tag{1}$$

Le conditionnement d'un problème est

$$\kappa = \sup \frac{\text{erreurs relatives résultat}}{\text{erreurs relatives données}}\,,$$

avec les erreurs données $\to 0$.

Pour un système linéaire :

- données : A, $\mathbf{b}$ (avec perturbations $A + \delta A$, $\mathbf{b} + \delta\mathbf{b}$)
- résultat : $\mathbf{x}$ ($\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}$ pour le système perturbé)

Conditionnement d'un système linéaire

Soit un système linéaire

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}\,. \tag{1}$$

Le conditionnement d'un problème est

$$\kappa = \sup \frac{\text{erreurs relatives résultat}}{\text{erreurs relatives données}}\,,$$

avec les erreurs données $\to 0$.

Cas 1 : perturbations $\delta\mathbf{b}$ de $\mathbf{b}$

Si $\mathbf{x}+\delta\mathbf{x}$ est la solution du système perturbé, on a aussi

$$\begin{aligned}
& A(\mathbf{x}+\delta\mathbf{x}) = \mathbf{b}+\delta\mathbf{b} & \\
\Rightarrow\quad & A\delta\mathbf{x} = \delta\mathbf{b} & \text{(soustraction de (1))} \\
\Rightarrow\quad & \|\delta\mathbf{x}\| = \|A^{-1}\delta\mathbf{b}\| \leq \|A^{-1}\|\,\|\delta\mathbf{b}\| & \text{(norme matricielle)}
\end{aligned}$$

et donc

$$\kappa = \sup_{\|\delta\mathbf{b}\|} \frac{\|\delta\mathbf{x}\|/\|\mathbf{x}\|}{\|\delta\mathbf{b}\|/\|\mathbf{b}\|} \leq \frac{\|A^{-1}\|\|\mathbf{b}\|}{\|\mathbf{x}\|} = \frac{\|A^{-1}\|\|A\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq \|A^{-1}\|\|A\|$$

Soit un système linéaire

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}\,. \tag{1}$$

Le conditionnement d'un problème est

$$\kappa = \sup \frac{\text{erreurs relatives résultat}}{\text{erreurs relatives données}}\,,$$

avec les erreurs données $\to 0$.

Cas 2 : perturbations δA de A

Si $\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}$ est la solution du système perturbé, on a aussi

$$(A + \delta A)(\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}) = \mathbf{b}$$

$$\Rightarrow \quad A\delta\mathbf{x} + \delta A\,\mathbf{x} + \underbrace{\cancel{\delta A\,\delta\mathbf{x}}}_{\text{second ordre}} = 0 \qquad \text{(soustraction de (1))}$$

$$\Rightarrow \quad \|\delta\mathbf{x}\| = \|A^{-1}\,\delta A\,\mathbf{x}\| \le \|A^{-1}\|\,\|\delta A\|\,\|\mathbf{x}\| \qquad \text{(norme matricielle)}$$

et donc

$$\kappa = \sup_{\|\delta A\|} \frac{\|\delta\mathbf{x}\|/\|\mathbf{x}\|}{\|\delta A\|/\|A\|} \le \|A^{-1}\|\|A\|$$

Conditionnement d'un système linéaire

Soit un système linéaire

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}\,. \tag{1}$$

Le conditionnement d'un problème est

$$\kappa = \sup \frac{\text{erreurs relatives résultat}}{\text{erreurs relatives données}}\,,$$

avec les erreurs données $\to 0$.

Conclusion : Les erreurs dans les données A, $\mathbf{b}$ d'un système sont amplifiées par (au plus)

$$\boxed{\kappa(A) := \|A^{-1}\|\,\|A\|\,.}$$

$\kappa(A)$ est appelé le conditionnement de la matrice A.

Octave : `cond` – évaluation du conditionnement ;

`norm` – évaluation des normes (y compris matricielles) ;

`inv` – inversion (y compris matricielle)

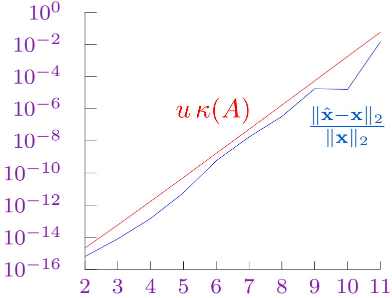
Erreurs d'arrondi $\propto \kappa(A)$: exemple

```
function hilb_cond
N = 10;
for n = 1:N
      % matrice de Hilbert
  A = hilb(n+1);
      % estimer le
      % conditionnement
  c(n) = cond(A);
      % vraie solution
  x0 = ones(n+1, 1);
      % a_{ij} > 0, x0_{i} > 0
      % => l'erreur relative
      % sur b ~ unité
      % d'arrondi (cf. TP2)
  b = A*x0;
  x = A\b;    % résoudre
  r(n) = norm(x-x0)/norm(x0);
end
semilogy(2:N+1, c*eps/2, 'r')
hold on
semilogy(2:N+1, r, 'b')
```

matrice de Hilbert : $A = \left(\dfrac{1}{i+j-1}\right)_{ij}$

ex : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{pmatrix}$

Membres de l'inégalité ch.1, p.17 pour un algorithme stable ("\")



Définition et mauvaises méthodes

Une méthode de résolution est *directe* si en arithmétique exacte elle fournit la solution après un nombre fini d'opérations.

«Mauvaises» méthodes directes pour systèmes linéaires

- méthode de Cramer :

$$x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}$$

  où A_i est obtenue en remplaçant la i-ème colonne de A par le second membre $\mathbf{b}$

  - coût : $n+1$ déterminants de taille n & n divisions
  - On apprend que pour évaluer un déterminant de taille n on calcule n déterminants de taille $n-1$, effectue n multiplications et $n-1$ additions

  $\Rightarrow$ coût d'un déterminant est au moins $n! = n(n-1)\cdots 1$ opérations (!)

- multiplication par l'inverse :

```
A = rand(1000);
b = rand(1000,1);
tic; x1 = A\b; toc
tic; x1 = inv(A)*b; toc
```

```
Elapsed time is 0.1557 seconds.
Elapsed time is 0.3586 seconds.
```

inversion matricielle $2.3\times$ plus lente !

Systèmes triangulaires

Exemple : système triangulaire inférieur

$$\left\{\begin{array}{lcl} a_{11}x_1 & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 & = & b_2 \\ & \cdots & \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{ii}x_i & = & b_i \\ & \cdots & \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{lcl} x_1 & = & b_1/a_{11} \\ x_2 & = & (b_2 - a_{21}x_1)/a_{22} \\ & \cdots & \\ x_i & = & \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j\right)/a_{ii} \\ & \cdots & \end{array}\right.$$

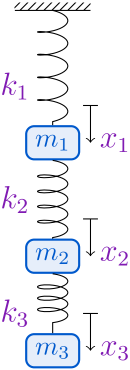
Coût : n^2 *flops* (n divisions, $n(n-1)/2$ multiplications et autant de soustractions)
(flop = de l'anglais floating point operation, opération avec un réel)

Existence : Si $a_{ii} \neq 0$ pour tout i, la solution existe ;
si non, $\det(A) = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn} = 0$ et le système n'est pas régulier.

Stabilité :(sans démonstration) La méthode de résolution a la stabilité inverse ; plus précisément, si $\widetilde{\mathbf{x}}$ est la solution calculée, il existe un δA triangulaire inférieure avec $|(\delta A)_{ij}| \leq n \cdot u \cdot |a_{ij}|$ tel que

$$(\delta A + A)\widetilde{\mathbf{x}} = \mathbf{b}\,.$$

Autre cas : le résolution d'un système triangulaire supérieur est semblable.



Exemple : (système de l'Exemple 1 dans la Motivation)

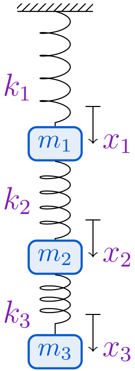
$$\left\{\begin{array}{c|cccc} 2x_1 & -x_2 & & = & 1 \\ \hline -x_1 & +2x_2 & -x_3 & = & 1 \\ & -x_2 & +x_3 & = & 1 \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} \text{(ligne du pivot)} \\ +\frac{1}{2}\ \text{(ligne 1)} \\ +0\ \text{(ligne 1)} \end{array}$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{cc|ccc} 2x_1 & -x_2 & & = & 1 \\ & \frac{3}{2}x_2 & -x_3 & = & \frac{3}{2} \\ \hline & -x_2 & +x_3 & = & 1 \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} \\ \text{(ligne du pivot)} \\ +\frac{2}{3}\ \text{(ligne 2)} \end{array}$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{ccccc} 2x_1 & -x_2 & & = & 1 \\ & \frac{3}{2}x_2 & -x_3 & = & \frac{3}{2} \\ & & \frac{1}{3}x_3 & = & 2 \end{array}\right.$$

$\rightarrow$ système triangulaire

Méthode d'élimination : forme matricielle



Exemple : (système de l'Exemple 1 dans la Motivation)

$$\left(\begin{array}{c|cc} 2 & -1 & \\ \hline -1 & 2 & -1 \\ & -1 & 1 \end{array}\right) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c} 1 \\ \hline 1 \\ 1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} \text{(ligne du pivot)} \\ +\frac{1}{2}\ \text{(ligne 1)} \\ +0\ \text{(ligne 1)} \end{array}$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & \\ & \frac{3}{2} & -1 \\ \cline{2-3} & -1 & 1 \end{array}\right) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c} 1 \\ \frac{3}{2} \\ \hline 1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} \text{(ligne du pivot)} \\ +\frac{2}{3}\ \text{(ligne 2)} \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & \\ & \frac{3}{2} & -1 \\ & & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3}{2} \\ 2 \end{pmatrix}$$

$\rightarrow$ système triangulaire

Méthode d'élimination : forme matricielle

$$\left(\begin{array}{c|ccc} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ \hline a_{21}^{(1)} & a_{22}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}^{(1)} & a_{n2}^{(1)} & \cdots & a_{nn}^{(1)} \end{array}\right) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c} b_1^{(1)} \\ \hline b_2^{(1)} \\ \vdots \\ b_n^{(1)} \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} \text{(ligne du pivot)} \\ -a_{21}^{(1)}/a_{11}^{(1)} \text{ (ligne 1)} \\ \quad\vdots \\ -a_{n1}^{(1)}/a_{11}^{(1)} \text{ (ligne 1)} \end{array}$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ & a_{22}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\ \hline & \vdots & & \vdots \\ & a_{n2}^{(2)} & \cdots & a_{nn}^{(2)} \end{array}\right) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c} b_1^{(1)} \\ b_2^{(2)} \\ \hline \vdots \\ b_n^{(2)} \end{array}\right) \Rightarrow \quad \cdots$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ & a_{22}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn}^{(n)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(2)} \\ \vdots \\ b_n^{(n)} \end{pmatrix} \rightarrow \quad \text{système triangulaire}$$

Méthode d'élimination : forme matricielle

$$\left(\begin{array}{c|ccc} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ \hline a_{21}^{(1)} & a_{22}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}^{(1)} & a_{n2}^{(1)} & \cdots & a_{nn}^{(1)} \end{array}\right) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c} b_1^{(1)} \\ \hline b_2^{(1)} \\ \vdots \\ b_n^{(1)} \end{array}\right) \begin{array}{l} \text{(ligne du pivot)} \\ -a_{21}^{(1)}/a_{11}^{(1)} \text{ (ligne 1)} \\ \vdots \\ -a_{n1}^{(1)}/a_{11}^{(1)} \text{ (ligne 1)} \end{array}$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ & a_{22}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\ \hline & \vdots & & \vdots \\ & a_{n2}^{(2)} & \cdots & a_{nn}^{(2)} \end{array}\right) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c} b_1^{(1)} \\ b_2^{(2)} \\ \hline \vdots \\ b_n^{(2)} \end{array}\right) \Rightarrow \quad \cdots$$

Algorithme :

pour $k = 1, \ldots, n-1$

$$\begin{aligned} \ell_{ik} &= a_{ik}^{(k)}/a_{kk}^{(k)}, \quad i = k+1, \ldots, n \\ a_{ij}^{(k+1)} &= a_{ij}^{(k)} - \ell_{ik} \cdot a_{kj}^{(k)}, \quad i, j = k+1, \ldots, n \\ b_i^{(k+1)} &= b_i^{(k)} - \ell_{ik} \cdot b_k^{(k)}, \quad i = k+1, \ldots, n \end{aligned}$$

résoudre le système triangulaire résultant

Coût : $\underbrace{\sum_{k=1}^{n-1} 2(n-k)^2 + \mathcal{O}(n^2)}$ $= \dfrac{2n^3}{3} + \mathcal{O}(n^2)$

$\rightarrow \quad n-k$ flops

$\rightarrow \quad 2(n-k)^2$ flops

$\rightarrow \quad 2(n-k)$ flops

Factorisation LU : exemple

Reprenons l'exemple précédent et répétons l'élimination de Gauss en appliquant des transformations matricielles ...

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & \\ -1 & 2 & -1 \\ & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{(ligne du pivot)} \\ +\frac{1}{2}\ \text{(ligne 1)} \\ +0\ \text{(ligne 1)} \end{array}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & \\ \frac{1}{2} & 1 & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}}_{L_1} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 & \\ -1 & 2 & -1 \\ & -1 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & \\ \frac{1}{2} & 1 & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}}_{L_1} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{b}}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 & \\ & \frac{3}{2} & -1 \\ & -1 & 1 \end{pmatrix}}_{L_1 A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}}_{L_1 \mathbf{b}} \quad \begin{array}{l} \text{(ligne du pivot)} \\ +\frac{2}{3}\ \text{(ligne 2)} \end{array}$$

et la seconde étape est similaire ...

Factorisation LU : exemple

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & \\ -1 & 2 & -1 \\ & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{(ligne du pivot)} \\ +\frac{1}{2}\ \text{(ligne 1)} \\ +0\ \text{(ligne 1)} \end{array}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & \\ \frac{1}{2} & 1 & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}}_{L_1} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 & \\ -1 & 2 & -1 \\ & -1 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & \\ \frac{1}{2} & 1 & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}}_{L_1} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{b}}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 & \\ & \frac{3}{2} & -1 \\ & -1 & 1 \end{pmatrix}}_{L_1 A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}}_{L_1 \mathbf{b}} \quad \begin{array}{l} \text{(ligne du pivot)} \\ +\frac{2}{3}\ \text{(ligne 2)} \end{array}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & \frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix}}_{L_2} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 & \\ & \frac{3}{2} & -1 \\ & -1 & 1 \end{pmatrix}}_{L_1 A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & \frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix}}_{L_2} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}}_{L_1 \mathbf{b}}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 & \\ & \frac{3}{2} & -1 \\ & & \frac{1}{3} \end{pmatrix}}_{L_2 L_1 A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3}{2} \\ 2 \end{pmatrix}}_{L_2 L_1 \mathbf{b}} \rightarrow \text{système triangulaire}$$

Factorisation LU : exemple (suite)

On a donc un système triangulaire (U triangulaire supérieure par construction)

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 & \\ & \frac{3}{2} & -1 \\ & & \frac{1}{3} \end{pmatrix}}_{U \,=\, L_2 L_1 A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3}{2} \\ 2 \end{pmatrix}}_{L_2 L_1 \mathbf{b}}$$

avec $\quad L_1 = \begin{pmatrix} 1 & & \\ \frac{1}{2} & 1 & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}, \quad L_2 = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & \frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix}.$

Le système transformé est

$$U\mathbf{x} = L_2 L_1 \mathbf{b}$$

et le système initial

$$\underbrace{L_1^{-1} L_2^{-1} U}_{A} \mathbf{x} = \mathbf{b}\,.$$

Mais que valent L_1^{-1}, L_2^{-1} ? et leur produit $L = L_2^{-1} L_1^{-1}$?

Factorisation LU : exemple (suite)

Propriété 1 : soient I_1, I_2 deux matrices identités et C une matrice rectangulaire ayant des dimensions compatibles ; alors

$$\begin{pmatrix} I_1 & \\ C & I_2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} I_1 & \\ -C & I_2 \end{pmatrix}.$$

et donc $\quad L_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ -\frac{1}{2} & 1 & \\ -0 & & 1 \end{pmatrix}, \qquad L_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & -\frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix}.$

Factorisation LU : exemple (suite)

Propriété 2 : soient I_1, I_2 deux matrices identités, C une matrice carrée et $\mathbf{v}$ un vecteur ayant tous des dimensions compatibles ; alors

$$\begin{pmatrix} 1 & \\ \mathbf{v} & I_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \\ & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \\ \mathbf{v} & C \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{pmatrix} I_1 & & \\ & 1 & \\ & \mathbf{v} & I_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 & & \\ & 1 & \\ & & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_1 & & \\ & 1 & \\ & \mathbf{v} & C \end{pmatrix}.$$

et donc $L = L_1^{-1} L_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ -\frac{1}{2} & 1 & \\ -0 & -\frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix}$ est une matrice triangulaire inférieure avec éléments diagonaux valant 1 (facile à construire à partir de L_i, $i = 1, 2$, et donc, à partir des facteurs qui multiplient les équations durant l'élimination).

Factorisation LU : exemple (suite)

Conclusion de l'exemple : l'élimination de Gauss réduit le système initial

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

à un système triangulaire supérieur

$$\underbrace{L_2 L_1 A}_{U}\mathbf{x} = L_2 L_1 \mathbf{b}\,.$$

A partir des facteurs qui multiplient les équations durant l'élimination on peut construire $L = L_1^{-1}L_2^{-1}$ triangulaire inférieure telle que

$$LU = A\,;$$

pour notre exemple on obtient

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & \\ -\frac{1}{2} & 1 & \\ -0 & -\frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix}}_{L}\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 & \\ & \frac{3}{2} & -1 \\ & & \frac{1}{3} \end{pmatrix}}_{U} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 & \\ -1 & 2 & -1 \\ & -1 & 1 \end{pmatrix}}_{A}\,.$$

Factorisation LU : cas général

De manière générale on procède aux transformations successives

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ a_{21}^{(1)} & a_{22}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}^{(1)} & a_{n2}^{(1)} & \cdots & a_{nn}^{(1)} \end{pmatrix}}_{A} \Rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ & a_{22}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\ & \vdots & & \vdots \\ & a_{n2}^{(2)} & \cdots & a_{nn}^{(2)} \end{pmatrix}}_{L_1 A} \ldots \Rightarrow \ldots \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ & a_{22}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn}^{(n)} \end{pmatrix}}_{U \,=\, L_{n-1}\cdots L_1 A}$$

avec les transformations

$$L_1 = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ -a_{21}^{(1)}/a_{11}^{(1)} & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ -a_{n1}^{(1)}/a_{11}^{(1)} & & & 1 \end{pmatrix}, \quad L_2 = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & -a_{32}^{(2)}/a_{22}^{(2)} & 1 & & \\ & \vdots & & \ddots & \\ & -a_{n2}^{(2)}/a_{22}^{(2)} & & & 1 \end{pmatrix}, \cdots$$

et donc

$$\boxed{A = LU}$$

avec $L = L_1^{-1} \cdots L_{n-1}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ a_{21}^{(1)}/a_{11}^{(1)} & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1}^{(1)}/a_{11}^{(1)} & a_{n2}^{(2)}/a_{22}^{(2)} & \cdots & 1 \end{pmatrix}$

LU : algorithme et résolution de systèmes

Algorithme (élimination de Gauss) :

pour $k = 1, \ldots, n-1$

$$\ell_{ik} = a_{ik}^{(k)} / a_{kk}^{(k)}, \quad i = k+1, \ldots, n$$

$$a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} - \ell_{ik} \cdot a_{kj}^{(k)}, \quad i, j = k+1, \ldots, n$$

$$b_i^{(k+1)} = b_i^{(k)} - \ell_{ik} \cdot b_k^{(k)}, \quad i = k+1, \ldots, n \qquad (*)$$

résoudre le système triangulaire supérieur correspondant (**)

se décompose en trois étapes (avec bien entendu $\ell_{ij} = u_{ji} = 0$ pour $j > i$, L et U étant triangulaires inférieure et supérieure, respectivement) :

Factorisation LU : $(L := (\ell_{ij}), U := (u_{ij}))$

pour $k = 1, \ldots, n$

$$u_{kj} = a_{kj}^{(k)}, \quad j = k, \ldots, n$$

$$\ell_{kk} = 1 \text{ et } \ell_{ik} = a_{ik}^{(k)} / a_{kk}^{(k)}, \quad i = k+1, \ldots, n$$

$$a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} - \ell_{ik} \cdot a_{kj}^{(k)}, \quad i, j = k+1, \cdots, n$$

Résoudre : le système triangulaire inférieur $L\mathbf{b}^{(n)} = \mathbf{b}$ équivalent à (*)

Résoudre : le système triangulaire supérieur $U\mathbf{x} = \mathbf{b}^{(n)}$ équivalent à (**)

Factorisation LU : propriétés

- Comme le transparent précédent le montre, la factorisation LU est équivalente à l'élimination de Gauss ; en particulier, son coût est aussi

$$\frac{2}{3}n^3 + \mathcal{O}(n^2)\,.$$

- Dans le cas de plusieurs seconds membres $\mathbf{b}$:
  - factoriser la matrice une seule fois (coût $\frac{2}{3}n^3$)
  - répéter les étapes de résolution pour chaque second membre (coût $2n^2$ par second membre)

- Si la factorisation $A = LU$ existe (avec U triangulaire supérieure et L triangulaire inférieure avec les éléments diagonaux valant 1), elle est unique

- La factorisation LU n'existe pas toujours pour les matrices régulières

  Ex. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ (A régulière car $\det(A) = -1$)

- La factorisation LU n'est pas stable

  Ex. voir transparent suivant

Factorisation LU : stabilité

Exemple :

$$\begin{pmatrix} 10^{-20} & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

la matrice est bien conditionnée : $\kappa(A) \; = \; 2.6180$

mais sa factorisation numérique est

$$L \; = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 10^{20} & 1 \end{pmatrix}, \quad U \; = \begin{pmatrix} 10^{-20} & 1 \\ 0 & 1 \ominus 10^{20} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10^{-20} & 1 \\ 0 & -10^{20} \end{pmatrix}$$

($1 \ominus 10^{20} = -10^{20}$ en double précision) et donc

$$LU \; = \begin{pmatrix} 10^{-20} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et la différence avec A dépasse largement u ; de même la solution obtenue par `U\(L\[1;2])` est $\begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix}$, et la vraie solution (à 10^{-20} près) est $\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Solution : permuter première et deuxième lignes (pivotage des lignes) ;

la factorisation de $P_{12}A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 10^{-20} & 1 \end{pmatrix}$ avec permutation $P_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

est stable

Pivotage partiel des lignes : on choisit d'éliminer (=choisir comme pivot) la ligne qui possède l'élément maximal en valeur absolue dans la colonne du pivot

Matrice de permutation élémentaire : pour les indices i et $j > i$ est

$$P = \begin{array}{cc} \left(\begin{array}{ccccccc} 1 &&&&&& \\ & \ddots &&&&& \\ && 0 && 1 && \\ &&& \ddots &&& \\ && 1 && 0 && \\ &&&&& \ddots & \\ &&&&&& 1 \end{array}\right) & \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \leftarrow j \\ \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{ccccccc} && \uparrow && \uparrow && \\ && i && j && \end{array} & \end{array}$$

- PA permute les lignes i et j de A (et donc $\det(PA) = -\det(A)$)
- AP permute les colonnes i et j de A (et donc $\det(AP) = -\det(A)$)
- $PP = I$ (deuxième permutation élémentaire annule la première)

Factorisation LU avec pivotage

Pivotage partiel des lignes : on choisit d'éliminer (=choisir comme pivot) la ligne qui possède l'élément maximal en valeur absolue dans la colonne du pivot

Exemple : $\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & \\ 1 & 1 & 1 \\ & 1 & 2 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{b}} \xrightarrow{\text{permuter } 1\leftrightarrow 1}$ (P_1 est identité)

$$\xrightarrow{\text{éliminer}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & \\ & 0 & 1 \\ & 1 & 2 \end{pmatrix}}_{L_1 P_1 A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{L_1 P_1 \mathbf{b}} \text{ avec } L_1 = \begin{pmatrix} 1 & & \\ -1 & 1 & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{permuter } 2\leftrightarrow 3} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & \\ & 1 & 2 \\ & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{P_2 L_1 P_1 A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{P_2 L_1 P_1 \mathbf{b}} \text{ avec } P_2 = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & & 1 \\ & 1 & \end{pmatrix}$$

$\xrightarrow{\text{éliminer}}$ même pas nécessaire (L_2 est identité) ;

on a alors

$$L_2 P_2 L_1 P_1 A = U.$$

Factorisation LU avec pivotage (suite)

Propriété 3 : Soit P_i une matrice de permutation élémentaire pour les indices i et j et soit

$$L_k = \begin{pmatrix} I_1 & & \\ & 1 & \\ & \mathbf{v} & I_2 \end{pmatrix}$$

avec I_1 de dimensions $(k-1) \times (k-1)$ et $\mathbf{v}$, I_2 ayant les dimensions compatibles (si $k = 1$, le résultat reste valable avec I_1 «supprimée»).

Si $k < i, j$

$$P_i L_k P_i = \begin{pmatrix} I_1 & & \\ & 1 & \\ & \mathbf{w} & I_2 \end{pmatrix}$$

avec $\mathbf{w}$ obtenu à partir de $\mathbf{v}$ en permutant les composantes $i - k$ et $j - k$.

Pour l'exemple précédent

$$L_1 = \begin{pmatrix} 1 & & \\ -1 & 1 & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & & 1 \\ & 1 & \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad P_2 L_1 P_2 = \begin{pmatrix} 1 & & \\ 0 & 1 & \\ -1 & & 1 \end{pmatrix}$$

Factorisation LU avec pivotage (suite)

Propriété 3 : Soit P_i une matrice de permutation élémentaire pour les indices i et j et soit

$$L_k = \begin{pmatrix} I_1 & & \\ & 1 & \\ & \mathbf{v} & I_2 \end{pmatrix}$$

avec I_1 de dimensions $(k-1) \times (k-1)$ et $\mathbf{v}$, I_2 ayant les dimensions compatibles (si $k = 1$, le résultat reste valable avec I_1 «supprimée»).

Si $k < i, j$

$$P_i L_k P_i = \begin{pmatrix} I_1 & & \\ & 1 & \\ & \mathbf{w} & I_2 \end{pmatrix}$$

avec $\mathbf{w}$ obtenu à partir de $\mathbf{v}$ en permutant les composantes $i - k$ et $j - k$.

Et donc $L_2 P_2 L_1 P_1 A = U$ peut être mis sous forme (en utilisant $P_2 P_2 = I$)

$$L_2 \underbrace{P_2 L_1 P_2}_{L'_1} P_2 P_1 A = U ;$$

on a alors, avec $L = {L'}_1^{-1} L_2^{-1}$ triangulaire inférieure et $P = P_2 P_1$,

$$PA = LU .$$

Factorisation LU avec pivotage (suite)

De manière générale si on applique le pivotage on a

$$L_{n-1}P_{n-1}L_{n-2}\cdots P_2L_1P_1A \;=\; U$$

qu'on peut réécrire (avec $P_iP_i = I$) comme

$$\underbrace{L_{n-1}}_{L'_{n-1}}\,\underbrace{P_{n-1}L_{n-2}P_{n-1}}_{L'_{n-2}}\cdots\underbrace{P_{n-1}\cdots P_2L_1P_2\cdots P_{n-1}}_{L'_1}\,\underbrace{P_{n-1}\cdots P_2P_1}_{P}\,A \;=\; U\,.$$

Grâce à la Propriété 3 les matrices L_i et L'_i , $i = 1, ..., n-1$, ont la même forme, et donc on a (comme avant)

$$PA \;=\; {L'_1}^{-1}\cdots{L'_{n-1}}^{-1}\,U$$

ou encore

$$\boxed{PA \;=\; LU}$$

avec L triangulaire inférieure dont les éléments diagonaux valent 1 ,
U triangulaire supérieure et P est une matrice de permutation.

FACTORISATION LU AVEC PIVOTAGE (SUITE)

- même nombre d'opérations (flops) que la factorisation LU, à savoir

$$\frac{2}{3}n^3 + \mathcal{O}(n^2);$$

- la factorisation $PA = LU$ existe pour toute matrice régulière ;
- la factorisation $PA = LU$ est réputée stable en pratique ;

RÉSOLUTION DE SYSTÈME $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ AVEC $PA = LU$:

1. déterminer la factorisation $PA = LU$ ($\frac{2}{3}n^3 + \mathcal{O}(n^2)$ flops)
2. permuter les éléments du second membre $\mathbf{b}_p = P\mathbf{b}$ (0 flops, au plus $n-1$ permutations)
3. résoudre $L\mathbf{y} = \mathbf{b}_p$ (n^2 flops)
4. résoudre $U\mathbf{x} = \mathbf{y}$ (n^2 flops)

Calcul du déterminant de A

Soit la factorisation $PA = LU$ avec :

- A une matrice $n \times n$
- U triangulaire supérieure avec éléments diagonaux $a_{kk}^{(k)}$, $k = 1, \dots, n$
  $\Rightarrow \quad \det(U) = a_{11}^{(1)} \cdots a_{nn}^{(n)}$
- L triangulaire inférieure avec éléments diagonaux 1
  $\Rightarrow \quad \det(L) = 1$
- $P = P_{n-1} \cdots P_1$ avec $\det(P_i) = \pm 1$ ($-$ si la permutation a effectivement eu lieu, $+$ si on n'a pas permuté)

Rappel : Pour deux matrices carrées B, C on a

$$\det(BC) = \det(B)\det(C)$$

On a donc $\det(P) = (-1)^p$ avec p le nombre de permutations effectuées et

$$\boxed{\det(A) = \det(U)/\det(P) = (-1)^p \, a_{11}^{(1)} \cdots a_{nn}^{(n)}}.$$

On ne résout donc pas un système en calculant des déterminants, on calcule un déterminant avec la factorisation LU (une méthode pour résoudre les systèmes).

Inversion matricielle

Soit une factorisation $PA = LU$ pour la matrice A.

Notez que si $\mathbf{x}_i$ est la colonne i de A^{-1}, alors elle est la solution de

$$A\mathbf{x}_i = \mathbf{e}_i$$

avec $\mathbf{e}_i$ le vecteur de la base canonique (sa composante i vaut 1 et les autres valent 0).

On peut calculer A^{-1} en

1. calculant la factorisation $PA = LU$ de A ($\frac{2}{3}n^3 + \mathcal{O}(n^2)$ flops)
2. permutant (pour $i = 1, \ldots, n$) $\mathbf{e}_{pi} = P\mathbf{e}_i$ (0 flops, au plus $n(n-1)$ permutations)
3. résolvant (pour $i = 1, \ldots, n$) $L\mathbf{y}_i = \mathbf{e}_{pi}$ ($n \cdot n^2 = n^3$ flops)
4. résolvant (pour $i = 1, \ldots, n$) $U\mathbf{x}_i = \mathbf{y}_i$ ($n \cdot n^2 = n^3$ flops)

Soit $\frac{8}{3}n^3 + \mathcal{O}(n^2)$ flops en tout.

Note : il est possible d'économiser des opérations lors de la première résolution (point 3) car $\mathbf{e}_i$ et donc $\mathbf{e}_{pi}$ ont presque tous leurs éléments valant 0. Le coût total peut donc être réduit à $2n^3 + \mathcal{O}(n^2)$ flops.