Analyse Numérique (MATH-H-202)

Algorithmes (document disponible à l'examen)

Règles de propagation des erreurs d'arrondi

Pour $|\epsilon_i|, |\epsilon'_i| \;\leq\; u$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

1. $\alpha\epsilon_1 \pm \beta\epsilon_2 \;=\; (|\alpha| + |\beta|)\epsilon_3$
2. $(1+\alpha\epsilon_1)(1+\beta\epsilon_2) \;=\; 1+(|\alpha|+|\beta|)\epsilon_3+|\alpha\beta|\mathcal{O}(u^2)$
3. $\dfrac{1}{1+\alpha\epsilon_4+\mathcal{O}(u^2)} \;=\; 1+\alpha\epsilon'_4+|\alpha|^2\mathcal{O}(u^2)$

Factorisation LU ($L \;:=\; (\ell_{ij})\,, U \;:=\; (u_{ij})$)

pour $k = 1, \ldots, n$

$$u_{kj} \;=\; a_{kj}^{(k)}\,, \quad j = k, \ldots, n$$
$$\ell_{kk} = 1 \text{ et } \ell_{ik} \;=\; a_{ik}^{(k)}/a_{kk}^{(k)}\,, \quad i = k+1, \ldots, n$$
$$a_{ij}^{(k+1)} \;=\; a_{ij}^{(k)} - \ell_{ik}\cdot a_{kj}^{(k)}\,, \quad i, j = k+1, \cdots, n$$

QR de Householder : produits avec Q et Q^T

Opération $\mathbf{w} \;:=\; Q\mathbf{w}$

pour $k = n, \ldots, 1$

$$\mathbf{w}(k:m) \;:=\; \mathbf{w}(k:m) - \mathbf{v}^{(k)}(2\,\mathbf{v}^{(k)\,T}\,\mathbf{w}(k:m))$$

Opération $\mathbf{w} \;:=\; Q^T\mathbf{w}$

pour $k = 1, \ldots, n$

$$\mathbf{w}(k:m) \;:=\; \mathbf{w}(k:m) - \mathbf{v}^{(k)}(2\,\mathbf{v}^{(k)\,T}\,\mathbf{w}(k:m))$$

Moindres carrés : conditionnement

$$\kappa_{MC,A} \;\leq \kappa(A) + \frac{\kappa(A)^2\|\mathbf{r}\|_2}{\|A\|_2\|\mathbf{x}\|_2} \leq\; \kappa(A) + \kappa(A)^2\tan(\theta)$$
$$\kappa_{MC,\mathbf{b}} \;\leq\; \kappa(A)/\cos(\theta)$$

Méthode de Jacobi

$$x_i^{(k+1)} \;=\; \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1,j\neq i}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\right), \quad i = 1, \ldots, n$$

Méthode de Gauss-Seidel

$$x_i^{(k+1)} \;=\; \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j<i} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j>i} a_{ij}x_j^{(k)}\right),$$
$$i = 1, \ldots, n$$

Méthode du gradient

$\mathbf{r}^{(0)} \;=\; \mathbf{b} - A\mathbf{x}^{(0)}$

répéter jusqu'à l'arrêt

$$\mathbf{p}^{(k)} \;=\; \mathbf{r}^{(k)}$$
$$\text{calculer } \alpha_k \;=\; \tfrac{\mathbf{p}^{(k)\,T}\mathbf{r}^{(k)}}{\mathbf{p}^{(k)\,T}A\mathbf{p}^{(k)}}$$
$$\mathbf{x}^{(k+1)} \;=\; \mathbf{x}^{(k)} + \alpha_k\mathbf{p}^{(k)}$$
$$\mathbf{r}^{(k+1)} \;=\; \mathbf{r}^{(k)} - \alpha_k A\mathbf{p}^{(k)}$$

Méthode du gradient conjugué

$\mathbf{r}^{(0)} \;=\; \mathbf{b} - A\mathbf{x}^{(0)}\;; \quad \mathbf{p}^{(0)} \;=\; \mathbf{r}^{(0)}$

répéter jusqu'à l'arrêt

$$\text{calculer } \alpha_k \;=\; \tfrac{\mathbf{p}^{(k)\,T}\mathbf{r}^{(k)}}{\mathbf{p}^{(k)\,T}A\mathbf{p}^{(k)}}$$
$$\mathbf{x}^{(k+1)} \;=\; \mathbf{x}^{(k)} + \alpha_k\mathbf{p}^{(k)}$$
$$\mathbf{r}^{(k+1)} \;=\; \mathbf{r}^{(k)} - \alpha_k A\mathbf{p}^{(k)}$$
$$\text{calculer } \beta_k \;=\; \tfrac{\left(A\mathbf{p}^{(k)}\right)^T\mathbf{r}^{(k+1)}}{\mathbf{p}^{(k)\,T}A\mathbf{p}^{(k)}}$$
$$\mathbf{p}^{(k+1)} \;=\; \mathbf{r}^{(k+1)} - \beta_k\mathbf{p}^{(k)}$$

Newton-Raphson avec recherche linéaire

répéter jusqu'à l'arrêt

    % pour autant que $f'(x_k) \neq 0$

    $p_k \;=\; \dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)}$

    $\alpha_k \;=\; 1$

    (a) répéter jusqu'à l'arrêt

        $x_{k+1} \;=\; x_k - \alpha_k\,p_k$

        si $|f(x_{k+1})| \;<\; |f(x_k)|$

            arrêter de répéter (a)

        $\alpha_k \;=\; \alpha_k/2$

Formules de Newton-Cotes

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx \;\approx h_i(w_1f_i + w_2f_{i+1/n} + \cdots + w_{n+1}f_{i+1})$$

avec

n	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$			
2	$\frac{1}{6}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{1}{6}$		
3	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	
4	$\frac{7}{90}$	$\frac{32}{90}$	$\frac{12}{90}$	$\frac{32}{90}$	$\frac{7}{90}$

Formule des trapèzes : erreur globale

Pour $f \in C^2([a,b])$ il existe un $c \in]a,b[$ tel que

$$E_{\text{glob}}(h) \;=\; -\tfrac{1}{12}(b-a)h^2f''(c)$$

Méthode de Romberg

% trapezes(a,b,f,k) - méthode de trapèzes pour f
% sur $[a,b]$ avec k intervalles

calculer $I_{1,i} = \text{trapezes}(a,b,f,2^{n-i})\,, \quad i = 1, \ldots, n$

pour $j = 1, \ldots, n-1$

    pour $i = 1, \ldots, n-j$

        $I_{j+1,i} \;=\; (4^jI_{j,i} - I_{j,i+1})/(4^j - 1)$