<u>Analyse numérique : exercices problèmes aux limites du chapitre 9</u>

1. Reproduire les graphiques p9 des transparents du ch9.

2. Reproduire les graphiques p13 des transparents du ch9.

3. Reproduire les graphiques p15 des transparents du ch9.

4. Reproduire les graphiques p17 des transparents du ch9.

Analyse numérique : résolution des exercices problèmes aux limites du chapitre 9

1. Voici une possibilité :

```
clear all; close all;
f = @(x) -2*pi^2*cos(2*pi*x);
L = 1;

m1 = 4;
[x1 y1] = chap9p9(f,L,m1);
figure(1); plot(x1,y1,'b-o',"markersize",3);hold on;

m2 = 8;
[x2 y2] = chap9p9(f,L,m2);
plot(x2,y2,'c-s',"markersize",3);

m3 = 16;
[x3 y3] = chap9p9(f,L,m3);
plot(x3,y3,'m-*',"markersize",3);

solexacte = @(x) (sin(pi*x)).^2;
h = 1/(16*10); x = 0:h:1; y = solexacte(x);
plot(x,y,'r')

figure(2);
d1 = round(1/(m1*h)); plot(x1,y1-y(1:d1:end),'b-o',"markersize",3);hold on;
d2 = round(1/(m2*h)); plot(x2,y2-y(1:d2:end),'c-s',"markersize",3);
d3 = round(1/(m3*h)); plot(x3,y3-y(1:d3:end),'m-*',"markersize",3);


function [x,y] = chap9p9(f,L,m)
h = L/m;
%CL Dirichlet
y(1) = 0;
y(m+1) = 0;
A = 2*eye(m-1) - diag(ones(m-2,1),1) - diag(ones(m-2,1),-1)  ;
h2 = h^2;
for i = 1:m-1
        b(i) = h2*f(i*h);
end
sol = A\b';
for i = 1:m-1
        y(i+1) = sol(i);
end
x = 0:h:L;
```

2. Résoudre numériquement le problème aux limites suivant :

$$\begin{cases} -\dfrac{d^2y}{dx^2}(x) = f(x), \quad x \in [0,1] \quad \text{avec } f(x) = -\dfrac{\pi^2}{2}\cos\left[\pi(x+1)\right] \\ \dfrac{dy}{dx}(0) = 0, \; y(1) = 0 \end{cases}$$

par la méthode des différences finies et en utilisant l'approximation la plus précise pour la condition de Neumann.

<u>Résolution</u>

L'approximation la plus précise pour la condition de Neumann $\dfrac{dy}{dx}(0) = c_0 = 0$ est :

$$\frac{y_1 - y_0}{h} \approx c_0 - \frac{h}{2}.f(0)$$

Discrétisons l'équation différentielle $-\dfrac{d^2y}{dx^2}(x) = f(x)$ aux points $x_k = k.h = k/m$ $(k = 1,..,m-1 \text{ car } h = 1/m)$ intérieurs du domaine :

$$\frac{-y_{k+1} + 2y_k - y_{k-1}}{h^2} = f(x_k) \quad \text{où} \quad k = 1,..,m-1$$

ou encore

$$-y_{k-1} + 2y_k - y_{k+1} = h^2 f(x_k) \quad \text{où} \quad k = 1,..,m-1$$

D'autre part, la C.L. de Neumann peut se mettre sous la forme : $y_0 - y_1 = \dfrac{h^2}{2} f(0)$

Pour *m = 3*, nous obtenons le système de 3 équations suivant :

$$\begin{cases} y_0 - y_1 & = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{3}\right)^2 f(0) \quad (\text{CL de Neumann}) \\ -y_0 + 2y_1 - y_2 & = \left(\dfrac{1}{3}\right)^2 f\left(\dfrac{1}{3}\right) \quad (\text{pour } k = 1) \\ \quad -y_1 + 2y_2 - y_3 & = \left(\dfrac{1}{3}\right)^2 f\left(\dfrac{2}{3}\right) \quad (\text{pour } k = 2) \end{cases}$$

La deuxième condition aux limites étant de Dirichlet, ce système ne contient en réalité que trois inconnues y_0, y_1 et y_2 puisque la condition $y(1) = 0$ est équivalente pour ce système à $y_3 = 0$. Le système précédent s'écrit plus simplement :

$$\begin{cases} y_0 - y_1 & = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{3}\right)^2 f(0) \\ -y_0 + 2y_1 - y_2 & = \left(\dfrac{1}{3}\right)^2 f\left(\dfrac{1}{3}\right) \\ \quad -y_1 + 2y_2 & = \left(\dfrac{1}{3}\right)^2 f\left(\dfrac{2}{3}\right) \end{cases}$$

La matrice *A* est de taille 3x3 lorsque *m* vaut 3, sa taille est donc en toute généralité *m x m*. En outre, elle est tridiagonale (avec *m-1* éléments sur les diagonales une unité au-dessus et une unité en-dessous de la diagonale principale) et peut donc s'obtenir dans Octave de la sorte :

```
A = 2*eye(m) - diag(ones(m-1,1),1) -  diag(ones(m-1,1),-1) ;    A(1,1) = 1;
```

<u>Voici une possibilité pour la fonction :</u>

```
function [x y] = chap9p13(f,L,m)
h = L/m;   h2 = h*h ;
A = 2*eye(m) - diag(ones(m-1,1),1) -  diag(ones(m-1,1),-1) ;    A(1,1) = 1;
for i = 1:m
        b(i) = h2 * f((i-1)*h);
end
b(1) = b(1)/2 ;
y = A\b';
y = [y ; 0];    % On intègre la CL de droite dans la solution.
x = 0 : h : 1 ;
```

<u>Voici une possibilité pour le script :</u>

```
% ExerciceChap9p13  (Neumann formule plus précise)
clear all; close all;
f = @(x) -pi^2/2 * cos(pi*(x+1));
L = 1;

m1 = 4;
[x1 y1] = chap9p13(f,L,m1);
figure(1)  ;   plot(x1,y1,'b-o',"markersize",3)  ;  hold on;

m2 = 8;
[x2 y2] = chap9p13(f,L,m2);
plot(x2,y2,'c-s',"markersize",3);

m3 = 16;
[x3 y3] = chap9p13(f,L,m3);
plot(x3,y3,'m-*',"markersize",3);

m4 = 32;
[x4 y4] = chap9p13(f,L,m4);
plot(x4,y4,'r');
% Solution numérique stabilisée pour m = 32, on la prendra comme référence pour calculer
% les erreurs.

rapport1 = m4/m1; erreur1 = abs (y4(1:rapport1:end) - y1) ;
figure(2)  ;   plot(x1,erreur1,'b-o',"markersize",3)  ;  hold on;

rapport2 = m4/m2; erreur2 = abs (y4(1:rapport2:end) - y2) ;
plot(x2,erreur2,'c-s',"markersize",3)  ;  hold on;

rapport3 = m4/m3; erreur3 = abs (y4(1:rapport3:end) - y3) ;
plot(x3,erreur3,'m-*',"markersize",3)  ;  hold on;
```

N.B. : D'une version octave à l'autre, les options graphiques de type 'm-*' doivent être adaptées.

3. Discrétisons l'équation différentielle $-\frac{d^2y}{dx^2}(x)+20\frac{dy}{dx}(x)=0$ aux points $x_k = k.h = k/m$ $\left(k=1,..,m-1 \text{ car } h=1/m\right)$ intérieurs du domaine :

L'énoncé nous imposant une différence centrée pour la dérivée première, voici les approximations des deux premières dérivées intervenant dans l'équation différentielle :

$$\frac{d^2y}{dx^2}(x_k) \simeq \frac{y_{k+1}-2y_k+y_{k-1}}{h^2} \text{ et } \frac{dy}{dx}(x_k) \simeq \frac{y_{k+1}-y_{k-1}}{2h}$$

L'équation $-\frac{d^2y}{dx^2}(x)+20\frac{dy}{dx}(x)=0$ devient ainsi :

$$\frac{-y_{k+1}+2y_k-y_{k-1}}{h^2}+\frac{20y_{k+1}-20y_{k-1}}{2h}=0 \quad \text{où} \quad k=1,..,m-1$$

ou encore :

$$-(10h+1)\,y_{k-1}+2y_k+(10h-1)\,y_{k+1}=0 \quad \text{où} \quad k=1,..,m-1$$

Pour *m = 4*, la dernière relation est équivalente aux 3 équations suivantes :

$$\begin{cases} -(10h+1)\,y_0 + 2y_1 + (10h-1)\,y_2 + 0y_3 + 0y_4 = 0 \\ 0y_0 - (10h+1)\,y_1 + 2y_2 + (10h-1)\,y_3 + 0y_4 = 0 \\ 0y_0 + 0y_1 - (10h+1)\,y_2 + 2y_3 + (10h-1)\,y_4 = 0 \end{cases}$$

Les deux conditions aux limites étant de Dirichlet, ce système ne contient en réalité que trois inconnues y_1, y_2 et y_3 puisque les conditions $y(0)=0$ et $y(1)=1$ sont équivalentes pour ce système à $y_0=0$ et $y_4=1$. Le système précédent s'écrit plus simplement :

$$\begin{cases} 2y_1 + (10h-1)\,y_2 + 0y_3 = 0 \\ -(10h+1)\,y_1 + 2y_2 + (10h-1)\,y_3 = 0 \\ 0y_1 - (10h+1)\,y_2 + 2y_3 = 1-10h \end{cases}$$

La matrice *A* est de taille 3x3 lorsque *m* vaut 4, sa taille est donc en toute généralité *(m-1) x (m-1)*. En outre, elle est tridiagonale (avec *m-2* éléments sur les diagonales une unité au-dessus et une unité en-dessous de la diagonale principale) et peut donc s'obtenir dans Octave de la sorte :
A = 2*eye(m-1) + (10*h-1)*diag(ones(m-2,1),1) - (10*h+1)*diag(ones(m-2,1),-1) ;

Voici une possibilité pour la fonction :

```
function [x,y] = chap9p15(f,L,m)
h = L/m;
y(1) = 0;    %CL Dirichlet
```

```
y(m+1) = 1;   %CL Dirichlet
A = 2*eye(m-1) + (10*h-1)*diag(ones(m-2,1),1) - (10*h+1)*diag(ones(m-2,1),-1) ;
b = zeros(m-1,1);
b(m-1,1) = 1-10*h;
sol = A\b;
for i = 1:m-1
        y(i+1) = sol(i);
end
x = 0:h:L;
```

Voici une possibilité pour le script :

```
% ConvectionCentree
clear all; close all;
f = @(x) 0;
L = 1;

m1 = 4;
[x1 y1] = chap9p15(f,L,m1);
figure(1); plot(x1,y1,'b-o',"markersize",3);hold on;

m2 = 8;
[x2 y2] = chap9p15(f,L,m2);
plot(x2,y2,'c-s',"markersize",3);

m3 = 16;
[x3 y3] = chap9p15(f,L,m3);
plot(x3,y3,'m-*',"markersize",3);

solexacte = @(x) (e.^(20*x) - 1)/(e^20 - 1);
h = 1/(16*10); x = 0:h:1; y = solexacte(x);
plot(x,y,'r')
```

4. Il s'agit de résoudre le même problème que celui de la question précédente, en évitant cette fois-ci les problèmes d'instabilité. Pour ce faire, nous adopterons un schéma upwind, le coefficient 20 de la dérivée première étant positif, la dérivée première sera approximée par une différence rétrograde.

$$\frac{d^2y}{dx^2}(x_k) \simeq \frac{y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}}{h^2} \quad \text{et} \quad \frac{dy}{dx}(x_k) \simeq \frac{y_k - y_{k-1}}{h}$$

L'équation $-\frac{d^2y}{dx^2}(x) + 20\frac{dy}{dx}(x) = 0$ est aussi approchée par:

$$\frac{-y_{k+1} + 2y_k - y_{k-1}}{h^2} + \frac{20y_k - 20y_{k-1}}{h} = 0 \quad \text{où} \quad k = 1,..,m-1$$

ou encore :

$$-(20h+1)\,y_{k-1} + (20h+2)\,y_k - y_{k+1} = 0 \quad \text{où} \quad k = 1,..,m-1$$

Pour *m = 4*, la dernière relation est équivalente aux 3 équations suivantes :

$$\begin{cases} (20h+2)\,y_1 - \quad y_2 + \quad 0\,y_3 = 0 \\ -(20h+1)\,y_1 + (20h+2)\,y_2 - \quad y_3 = 0 \\ \quad 0\,y_1 - (20h+1)\,y_2 + (20h+2)\,y_3 = 1 \end{cases}$$

Dans Octave, le script est presque le même que celui de la question précédente, il suffit de changer le nom de la fonction qu'on utilise pour résoudre le problème (dans ce cas-ci chap9p17 au lieu de chap9p15). Une possibilité pour la fonction est la suivante :

```
function [x,y] = chap9p17(f,L,m)
h = L/m;
y(1) = 0;     %CL Dirichlet
y(m+1) = 1;   %CL Dirichlet
A = (20*h+2)*eye(m-1) - diag(ones(m-2,1),1) - (20*h+1)*diag(ones(m-2,1),-1) ;
b = zeros(m-1,1);
b(m-1,1) = 1;
sol = A\b;
for i = 1:m-1
        y(i+1) = sol(i);
end
x = 0:h:L;
```