Analyse numérique : exercices de déformée de poutre

Les exercices suivants concernent le calcul de la déformation d'une poutre. En mécanique des structures, la déformée verticale *y* d'une poutre homogène et à section constante est décrite par l'équation différentielle :

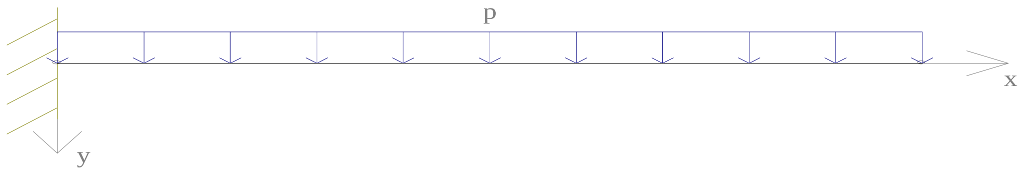
$$-\frac{d^2y}{dx^2}(x)=\frac{M(x)}{EI}$$

où *M(x)* est le moment fléchissant, calculé sur base de la force *p* répartie sur la poutre, et *EI* est la rigidité flexionnelle. Notons que plus la valeur de la rigidité flexionnelle est élevée, moins la poutre a tendance à fléchir ; **dans ce qui suit nous fixons *EI*=1**. Le problème est complété avec le choix des conditions aux limites, qui déterminent les conditions de fixation de la poutre.

1. Résolvez l'équation différentielle $-\frac{d^2y}{dx^2}(x)=\frac{M(x)}{EI}$ où $M(x)=-\frac{p}{2}(L-x)^2$, $x\in[0,1]$

   $y(0)=0$ et $y'(0)=0$.

   Ce problème revient à calculer la déformée d'une poutre encastrée-libre de longueur *L = 1*, soumise à une charge *p* uniformément répartie (que nous fixerons unitaire).

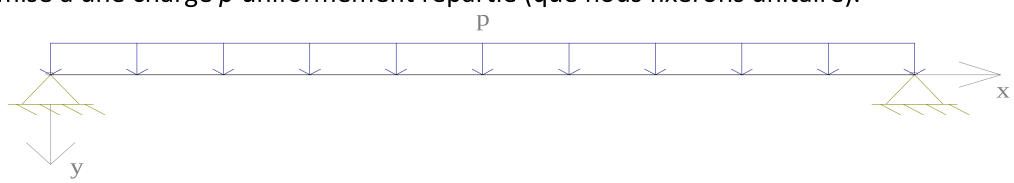


   N.B. : Il est possible de déterminer la solution exacte pour vérifier les résultats numériques. A défaut, une autre vérification est donnée par la formule de la flèche $f=\frac{pL^4}{8EI}$, ce qui correspond à la valeur maximale de la déformée, qui dans ce cas, se produit à l'extrémité droite de la poutre.

2. Résolvez l'équation différentielle $-\frac{d^2y}{dx^2}(x)=\frac{M(x)}{EI}$ où $M(x)=\frac{px}{2}(L-x)$, $x\in[0,1]$

   $y(0)=0$ et $y(L)=0$.

   Ce problème revient à calculer la déformée d'une poutre bi-encastrée de longueur *L = 1*, soumise à une charge *p* uniformément répartie (que nous fixerons unitaire).

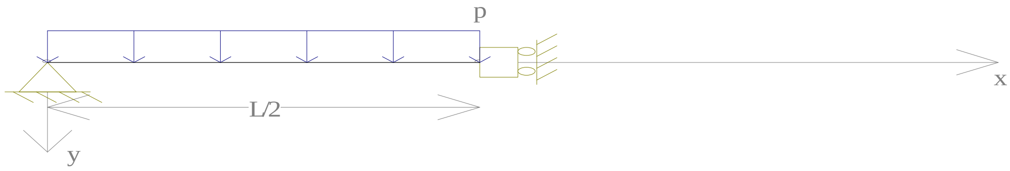


   N.B. : Il est possible de déterminer la solution exacte pour vérifier les résultats numériques. A défaut, une autre vérification est donnée par la formule de la flèche $f=\frac{5pL^4}{384EI}$, ce qui correspond à la valeur maximale de la déformée, qui dans ce cas, se produit au milieu de la poutre.

3. Résolvez l'équation différentielle $-\dfrac{d^2y}{dx^2}(x)=\dfrac{M(x)}{EI}$ où $M(x)=\dfrac{px}{2}(L-x)$, $x\in\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$

$y(0)=0$ et $y'\left(\dfrac{L}{2}\right)=0$.

Ce problème revient à résoudre l'exercice précédent en tenant compte de la symétrie. La structure précédente est en effet symétrique et chargée symétriquement, la déformée est donc également symétrique par rapport à l'axe *x = L/2*. La poutre étudiée est donc appuyée à gauche et encastrée (de pente nulle) avec déplacement vertical en *x = L/2*.



Analyse numérique : résolution des exercices de déformée de poutre

1. Notez que cet exercice est un problème avec des conditions initiales et non pas un problème avec des conditions aux limites car les deux conditions portant sur *y* et sa dérivée sont données uniquement en *x = 0* et non pas *x = 0* et *x = L*.

   Une manière de déterminer la déformée est de résoudre **le problème de Cauchy** suivant : l'équation différentielle $\frac{d^2y}{dx^2}(x)=\frac{1}{2}(L-x)^2$ du second ordre peut aussi s'écrire compte tenu des conditions initiales :

$$\begin{cases}\frac{d}{dx}\begin{pmatrix}u\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(L-x)^2/2\\u\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}u(0)\\y(0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\end{cases}\quad \text{ou} \quad \begin{cases}\frac{d}{dx}\begin{pmatrix}u\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}(L-x)^2/2\\0\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}u(0)\\y(0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\end{cases}$$

   Voici une possibilité (résolution numérique avec la méthode d'Euler progressive) :

```
clear all; close all;
EI = 1; L = 1;
p = 1; % p = charge uniformément répartie par unité de longueur
f = @(x,y) ([0 0; 1 0]*y +[p*(L-x).^2/(2*EI); 0]) ;
y0 = [0;0];
h = 0.01; x = 0:h:1;
sol = eulerp (f, y0 , x);
yexacte = @(x) p/(2*EI).*((L-x).^4/12 + L^3/3*x - L^4/12) ;
% la première composante de la solution est dy/dx et la seconde est y
% Vu le système d'axes adopté, les solutions sont précédées de "-"
plot (x, -sol (2,:));hold on
plot (x, -yexacte(x),'r')
% Verification de la flèche (à l'extrémité droite de la poutre : en x = L)
sol (2,101) - p*L^4/(8*EI)
yexacte(L) - p*L^4/(8*EI)
```

   L'expression analytique de la solution exacte peut être déterminée en effectuant deux intégrations successives de l'équation différentielle et en déterminant les deux constantes d'intégration à partir des deux conditions initiales :

$$\frac{d^2y}{dx^2}(x)=\frac{p}{2}(L-x)^2$$

$$\frac{dy}{dx}(x)=\frac{p}{2}\left(\frac{-(L-x)^3}{3}+C_1\right)$$

$$\text{Or } \frac{dy}{dx}(0)=0 \text{ donc } \frac{p}{2}\left(\frac{-L^3}{3}+C_1\right)=0 \text{ d'où } C_1=\frac{L^3}{3}$$

$$y(x)=\frac{p}{2}\left(\frac{(L-x)^4}{12}+\frac{L^3}{3}x+C_2\right)$$

Or $y(0)=0$ donc $y(x)=\frac{p}{2}\left(\frac{L^4}{12}+C_2\right)$ d'où $C_2=-\frac{L^4}{12}$

Finalement : $y(x)=\frac{p}{2}\left(\frac{(L-x)^4}{12}+\frac{L^3}{3}x-\frac{L^4}{12}\right)$

2. Discrétisons l'équation différentielle $\frac{d^2y}{dx^2}(x)=\frac{x(x-1)}{2}$ aux points $x_k=k.h=k/m$ $(k=1,..,m-1 \text{ car } h=1/m)$ intérieurs du domaine :

$$2y_{k-1}-4y_k+2y_{k+1}=h^2x_k(x_k-1) \quad \text{où} \quad k=1,..,m-1$$

Pour *m = 4*, la dernière relation est équivalente aux 3 équations suivantes :

$$\begin{cases} 2y_0-4y_1+2y_2+0y_3+0y_4=h^2x_1(x_1-1) \\ 0y_0+2y_1-4y_2+2y_3+0y_4=h^2x_2(x_2-1) \\ 0y_0+0y_1+2y_2-4y_3+2y_4=h^2x_3(x_3-1) \end{cases}$$

Les deux conditions aux limites étant de Dirichlet, ce système ne contient en réalité que trois inconnues y_1, y_2 et y_3 puisque les conditions $y(0)=0$ et $y(1)=0$ sont équivalentes pour ce système à $y_0=0$ et $y_4=0$. Le système précédent s'écrit plus simplement :

$$\begin{cases} -4y_1+2y_2+0y_3=h^2x_1(x_1-1) \\ 2y_1-4y_2+2y_3=h^2x_2(x_2-1) \\ 0y_1+2y_2-4y_3=h^2x_3(x_3-1) \end{cases}$$

Voici une possibilité pour la fonction :

```
function [x,y] = poutreDD(L,m)
h = L/m;
x = 0:h:L;
y(1) = 0;     %CL Dirichlet
y(m+1) = 0;   %CL Dirichlet
A = -2*eye(m-1) + 2*diag(ones(m-2,1),1) ; A = A+A' ;
h2 = h*h;
for i = 1:m-1
        b(i) = h2*x(i+1)*(x(i+1)-1);
end
sol = A\b';
for i = 1:m-1
        y(i+1) = sol(i);
end
```

Voici une possibilité pour le script :

```
clear all; close all;
EI = 1;
L = 1;
p = 1; % p = charge uniformément répartie par unité de longueur

% Vu le système d'axes adopé, représentation graphique de -y
m1 = 4;
[x1 y1] = poutreDD(L,m1);
figure(1); plot(x1,-y1,'b-o',"markersize",3);hold on;

m2 = 8;
[x2 y2] = poutreDD(L,m2);
plot(x2,-y2,'c-s',"markersize",3);

m3 = 16;
[x3 y3] = poutreDD(L,m3);
plot(x3,-y3,'m-*',"markersize",3);

yexacte = @(x) p/2*(x.^4/12 - L*x.^3/6 + L^3*x/12);
h = 1/(16*10); x = 0:h:1; y = yexacte(x);
plot(x,-y,'r')

% Verification de la flèche (au milieu de la poutre : en x = L/2)
y1(3) - 5*p*L^4/(384*EI)
y2(5) - 5*p*L^4/(384*EI)
y3(9) - 5*p*L^4/(384*EI)
yexacte(L/2) - 5*p*L^4/(384*EI)
```

L'expression analytique de la solution exacte peut être déterminée en effectuant deux intégrations successives de l'équation différentielle et en déterminant les deux constantes d'intégration à partir des deux conditions aux limites :

$$\frac{d^2y}{dx^2}(x) = \frac{p}{2}\left(x^2 - Lx\right)$$

$$\frac{dy}{dx}(x) = \frac{p}{2}\left(\frac{x^3}{3} - L\frac{x^2}{2} + C_1\right)$$

$$y(x) = \frac{p}{2}\left(\frac{x^4}{12} - L\frac{x^3}{6} + C_1 x + C_2\right)$$

Or $y(0) = 0$ donc $\frac{p}{2}\left(\frac{0^4}{12} - L\frac{0^3}{6} + C_1.0 + C_2\right) = 0$ d'où $C_2 = 0$

Or $y(L) = 0$ donc $\frac{p}{2}\left(\frac{L^4}{12} - \frac{L^4}{6} + C_1.L\right) = 0$ d'où $C_1 = \frac{L^3}{12}$

Finalement : $y(x) = \frac{p}{2}\left(\frac{x^4}{12} - L\frac{x^3}{6} + \frac{L^3}{12}x\right)$

3. Discrétisons l'équation différentielle $\frac{d^2y}{dx^2}(x)=\frac{x(x-1)}{2}$ aux points $x_k=k.h=k/m$ $(k=1,..,m-1 \text{ car } h=1/2/m)$ intérieurs du domaine :

$$2y_{k-1}-4y_k+2y_{k+1}=h^2x_k\left(x_k-1\right) \quad \text{où} \quad k=1,..,m-1$$

Discrétisons la condition de Neumann en $x = L/2 = x_m$:

L'équation différentielle s'écrit en $x = x_m$: $\frac{d^2y}{dx^2}(x_m)=\frac{x_m\left(x_m-1\right)}{2}$

D'autre part : $\frac{d^2y}{dx^2}(x_m)=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)(x_m)$

avec $\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)(x_m)\simeq\frac{\left(\frac{dy}{dx}\right)(x_m)-\left(\frac{dy}{dx}\right)(x_{m-1/2})}{h/2}$ (différence rétrograde)

et $\left(\frac{dy}{dx}\right)(x_{m-1/2})\simeq\frac{y_m-y_{m-1}}{h}$ (différence centrée)

donc l'équation différentielle en $x = x_m$ s'écrit aussi :

$$\frac{\left(\frac{dy}{dx}\right)(x_m)-\frac{y_m-y_{m-1}}{h}}{h/2}=\frac{x_m\left(x_m-1\right)}{2}$$

Compte tenu de la condition de Neumann $\left(\frac{dy}{dx}\right)(x_m)=0$, la relation précédente devient :

$$4y_{m-1}-4y_m=h^2x_m\left(x_m-1\right)$$

Pour $m = 3$, la relation $2y_{k-1}-4y_k+2y_{k+1}=h^2x_k\left(x_k-1\right)$ où $k=1,..,m-1$ est équivalente aux deux premières équations du système suivant, la troisième équation de ce système étant la condition de Neumann

$$\begin{cases}2y_0-4y_1+2y_2+0y_3=h^2x_1\left(x_1-1\right)\\0y_0+2y_1-4y_2+2y_3=h^2x_2\left(x_2-1\right)\\0y_0+0y_1+4y_2-4y_3=h^2x_3\left(x_3-1\right)\end{cases}$$

La condition aux limites de gauche étant de Dirichlet, ce système ne contient en réalité que trois inconnues y_1, y_2 et y_3 puisque la condition $y(0)=0$ est équivalente pour ce système à $y_0=0$. Le système précédent s'écrit plus simplement :

$$\begin{cases}-4y_1+2y_2+0y_3=h^2x_1\left(x_1-1\right)\\ \ \ 2y_1-4y_2+2y_3=h^2x_2\left(x_2-1\right)\\ \ \ 0y_1+4y_2-4y_3=h^2x_3\left(x_3-1\right)\end{cases}$$

Voici une possibilité pour la fonction :

```
function [x,y] = poutreDN(L,m)
h = L/2/m;
x = 0:h:L/2;
y(1) = 0;     %CL Dirichlet
A = -4*eye(m) + 2*diag(ones(m-1,1),1) + 2*diag(ones(m-1,1),-1) ; A(m,m-1)=4 ;
h2 = h*h;
for i = 1:m
        b(i) = h2*x(i+1)*(x(i+1)-1);
end
sol = A\b';
for i = 1:m
        y(i+1) = sol(i);
end
```

Voici une possibilité pour le script :

```
% PoutreAppuyeeEncastree
clear all; close all;
EI = 1; L = 1;
p = 1; % p = charge uniformément répartie par unité de longueur

% Vu le système d'axes adopé, représentation graphique de -y
m1 = 2;
[x1 y1] = poutreDN(L,m1);
figure(1); plot(x1,-y1,'b-o',"markersize",3);hold on;

m2 = 4;
[x2 y2] = poutreDN(L,m2);
plot(x2,-y2,'c-s',"markersize",3);

m3 = 8;
[x3 y3] = poutreDN(L,m3);
plot(x3,-y3,'m-*',"markersize",3);

yexacte = @(x) p/2*(x.^4/12 - L*x.^3/6 + L^3*x/12);
h = 1/(8*10); x = 0:h:L/2; y = yexacte(x);
plot(x,-y,'r')

% Verification de la flèche
y1(3) - 5*p*L^4/(384*EI)
y2(5) - 5*p*L^4/(384*EI)
y3(9) - 5*p*L^4/(384*EI)
yexacte(L/2) - 5*p*L^4/(384*EI)
```